SOMMES BINOMIALES

ANALYSE 2

DÉFINITION

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, coefficient binomial de paramètre n, k :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

• si $n < k$, alors $\binom{n}{k} = 0$

mettre la déf de n et k dans $\binom{n}{k}$

triangle de pascal

$n=0$ ①
$n=1$ ① ①
$n=2$ ① ② ①
$n=3$ ① ③ ③ ①
$n=4$ ① ④ ⑥ ④ ①
$n=5$ ① ⑤ ⑩ ⑩ ⑤ ①
$k=0$ $k=1$ $k=2$ $k=3$ $k=4$ $k=5$

$\Downarrow$

$n \to$, $k \to$ $\binom{5}{1} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = 1 + 4 = 5$

PROPRIÉTÉS

• symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

• $k \neq 0$: $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

• triangle de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

COROLLAIRE

les coefficients binomiaux sont des ENTIERS.

THÉORÈME (formule du binome) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k} = (x+y)^n$$

ex. $0 = (1+(-1))^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^{k}$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k}$

RÉVISIONS

$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n-k}$

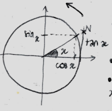
la formule de Newton $\longrightarrow$

revoir la formule de Newton et expliter

ex. $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{k} \cdot 1^{n-k}\right) = (5+1)^n$

~~TRIGONOMÉTRIE~~

TRIGONOMÉTRIE



• $\forall$ point $(a;b)$ du cercle, $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq b \leq 1$, $a^2+b^2=1$.

• $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

• soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :
x est congru à y modulo θ, $x \equiv y\,[\theta]$

• $\forall k \in \mathbb{Z}$ tq $x - y = k.\theta \iff x = y + k.\theta$

PROPRIÉTÉS

• les f° sin et cos sont 2π périodiques, donc $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

• impaire : $\sin(-x) = -\sin(x)$

• paire : $\cos(-x) = \cos(x)$

• $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

PROPOSITION

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$,

$\sin x = \sin y \iff x \equiv y\,[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - y\,[2\pi]$

$\cos x = \cos y \iff x \equiv y\,[2\pi]$ ou $x \equiv -y\,[2\pi]$

TRANSFORMATIONS AFFINES

$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi - x) = \sin(x)$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

FORMULES D'ADDITION

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

• parité des fonctions trigonométriques :

$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

FORMULES DE DUPLICATION

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2(x)$

$= 2\cos^2 x - 1$

$= 1 - 2\sin^2 x$

FORMULES DE PRODUIT

$\forall x, y \in \mathbb{R},$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$

VALEURS REMARQUABLES

$\tan(x) = \tan(x+\pi)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\varnothing$

FONCTION TANGENTE

fonction tangente = $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$

- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\tan(x) = \tan(y) \iff x = y\ [\pi]$
- tan est π périodique.
- tan est impaire : $\tan(-x) = -\tan(x)$

FORMULES

- $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

MÉTHODES CC1

Écrire avec factorielles $\prod_{k=2}^{n} (2k+1)$

1) diviser l'équation : $\prod^{n} k \times \prod^{n} 2k^{-1}$ nombre pairs $\times$ nombres impairs

$5 \times 6 \times 7 \times \dots \times 2n+1 \leftarrow k=5$ $\quad k=3 \rightarrow 6 \times 8 \times \dots \times 2n$

2) diviser à nouveau : $\prod_{k=5}^{n} k \times \prod_{k=3}^{n} 2^{-1} \times \prod_{k=3}^{n} k^{-1}$

3) développer et trouver $k=1$: $\dfrac{1}{1\times2\times3\times4} \times \prod_{k=1}^{2n+1} k \times \dfrac{1}{1\times2} \prod_{k=1}^{n} k^{-1} \times \dfrac{1}{2^{n+1-3}}$

4) mettre la factorielle :

$$\frac{(2n+1)!}{4!} \times \left(\frac{n!}{2!}\right)^{-1} \times \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{(2n+1)!}{12 \times 2^{n-2} n!}$$

calculer $\prod_{k=2}^{n} \dfrac{k}{k+2}$

1) changement d'indice : $k' = k+2$ $\quad$ • $k=2 \rightarrow k'=4$, $\quad k=n \rightarrow k'=n+2$

$\prod_{k=2}^{n} k+2 = \prod_{k'=4}^{n+2} k' = \prod_{k=4}^{n+2} k$ $\quad$ SUPPRIMER LE +2

2) supprimer les produits

$$\frac{\prod_{k=2}^{n} k}{\prod_{k=2}^{n} k+2} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k}{\prod_{k=4}^{n+2} k} = \frac{2\times3\times\cancel{\prod_{k=4}^{n} k}}{(n+1)(n+2)\times\cancel{\prod_{k=4}^{n} k}} = \frac{6}{(n+1)(n+2)}$$

$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

$-\pi = \sin(x)$

$+\frac{\pi}{2} = +\cos(x)$

$-\frac{\pi}{2} = \cos(x)$

$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$

$-\pi = -\cos(x)$

$+\frac{\pi}{2} = -\sin(x)$

$-\frac{\pi}{2} = \sin(x)$