



Préing 1

Devoir Surveillé 1

Analyse I

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : 13/11/2024

Durée : 1h00

Nombre de pages : 2

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 (4 points) : Choisir deux des trois questions suivants. Résoudre, dans \mathbb{R} , les inéquations suivantes :

1. $\sin(x) = \cos(2x)$.
2. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$.
3. $\frac{x+5}{x^2-1} \geq 1$.

Exercice 2 (5 points) :

1. Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$, le rationnel x dont le développement décimal périodique est donné par : $98,990\overline{34}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x)$ sa partie entière.
 - (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x) + 1$.
 - (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, E(2x) = \begin{cases} 2E(x) & \text{si } x - E(x) < \frac{1}{2} \\ 2E(x) + 1 & \text{si } x - E(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Exercice 3 (4 points) : Choisir deux des trois questions suivants. Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$. **Indication** : $k = (k+1) - 1$ et simplifier.
2. $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{n}{k}$.
3. $\prod_{k=0}^n 2 \cdot \pi^k$.

Exercice 4 (7 points) : On considère les ensembles A et B suivants

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+5| > 1 \text{ et } x^2 + 7x \leq 8\} \quad ; \quad B = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Les ensembles A et B sont-ils majorés, minorés? Justifier votre réponse.
2. Pour chaque ensemble A et B déterminer, s'il existe, les bornes supérieure et inférieure ainsi que le plus grand et le plus petit élément. Justifier votre réponse.