CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 2** **Analyse I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date : 12/12/2023* *Durée :* **1h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 (6 points) : Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4+n-1}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{E(\ln(n))}{n}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \dfrac{(-1)^n n^2 + n^3}{1+3n^3} + i \cdot \dfrac{n^2+2n}{3n^2+2i}$.

Exercice 2 (4 points) : Montrer, en revenant à la définition de la limite, que :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$, pour $u_n = \dfrac{2n^3-3}{n^3+1}$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, pour $v_n = -2\ln(3n+1)$.

Exercice 3 (4 points) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'est-ce qu'on peut dire à propos de la valeur de leur limite?

Exercice 4 (6 points) : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 - \frac{18}{2u_n + 12}.$$

On se placera dans $I = [0, 18]$. On pose

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4 - \frac{18}{2x + 12}. \end{aligned}$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f.
2. Montrer que l'intervalle I est stable par f.
3. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de f dans cet intervalle.
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.