Département de Mathématiques
PréING1-Analyse
2021 - 2022

Correction DS1 Analyse - 18 novembre 2021

Exercice 1 : Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\sin(3x) = \cos(x)$. (1 point)

   Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\sin(3x) = \cos(x) &\iff \sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
&\iff 3x \equiv x + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv \pi - x - \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 4x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&\iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $\sin(3x) = \cos(x)$, est donné par

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{8} + k\pi,\ \frac{5\pi}{8} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. $\tan^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0$. (1,5 point)

   Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $3x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (i.e. $x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$), nous avons

$$\begin{aligned}
\tan^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0 &\iff \tan^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \\
&\iff \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{3} \\
&\iff \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\ [\pi] \quad \text{ou} \quad 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\ [\pi] \\
&\iff 3x = 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad 3x = -\frac{2\pi}{3}\ [\pi] \\
&\iff 3x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 3x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $\tan^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0$, est donné par

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{k\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{k\pi,\ \frac{\pi}{3} + k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ -\frac{2\pi}{9} + k\pi,\ \frac{\pi}{9} + k\pi,\ \frac{4\pi}{9} + k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.
\end{aligned}$$

3. $(5E(x)+2)\cdot(3E(x)+6)=0$. (1,5 point)

Solution : Nous avons

$$(5E(x)+2)\cdot(3E(x)+6)=0 \iff E(x)=-\frac{2}{5} \text{ ou } E(x)=-\frac{6}{3}=-2.$$

Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $E(x)$ est un entier. Donc l'equation $E(x)=-\frac{2}{5}$ n'a pas de solution. Ainsi

$$(5E(x)+2)\cdot(3E(x)+6)=0 \iff E(x)=-2 \iff x\in[-2,-1[.$$

Exercice 2 : Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\left|\frac{1}{x}+1\right|<1$. (1 point)

   Solution : Il faut que $x\neq 0$: Cette inéquation est équivalente à $-1<\frac{1}{x}+1<1$
   - Si $x>0$, on obtient $-x<1+x<x$ ce qui impossible.
   - Si $x<0$, on obtient $x<1+x<-x$ ce qui implique que $x<-\frac{1}{2}$.

   Donc, $S_1=]-\infty;-\frac{1}{2}[$.

2. $(2E(x)+1)^2<4$. (1,5 point)

   Solution : On cherche à résoudre $(2E(x)+1)^2<4$ ce qui est équivalent à $|2E(x)+1|<2 \Leftrightarrow -2<2E(x)+1<2$. On obtient

   $$-\frac{3}{2}<E(x)<\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -1\leq E(x)\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x<1.$$

   Donc, $S_2=]-1;1[$.

3. $\sqrt{x^2-1}<2-x$. (1,5 point)

   Solution : On cherche à résoudre $\sqrt{x^2-1}<2-x$. Tout d'abord, cette inéquation est définie si $x^2-1\geq 0$ et $0<2-x$, ce qui équivalent à

   $$x\in]-\infty;-1]\cup[1;2[.$$

   Dans ce cas, en passant au carré de deux côtés, on obtient

   $$x^2-1<4-4x+x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4x<5 \quad\Leftrightarrow x<\frac{5}{4}.$$

   Donc, $S_3=]-\infty;-1]\cup[1;\frac{5}{4}[$.

Exercice 3 : Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$. (1,5 point)

   Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\\ &= \frac{1}{0!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} \binom{n}{k}$. (1,5 point)

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} \binom{n}{k} &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)^n}{3} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3}.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (-5) \cdot e^k$. (1 point)

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} (-5) \cdot e^k &= \prod_{k=0}^{n} (-5) \cdot \prod_{k=0}^{n} e^k \\ &= (-5)^{n+1} e^{\sum_{k=0}^{n} k} \\ &= (-5)^{n+1} e^{\frac{n(n+1)}{2}}.\end{aligned}$$

Exercice 4 : On considère les ensembles A et B suivants

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \geq 0 \ \text{ et } \ |x-1| < 3\right\} \quad ; \quad B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

1. Les ensembles A et B sont-ils majorés, minorés ? Justifier votre réponse.

Solution : (1 point) Commençons par étudier l'ensemble A. Nous avons

$$\begin{aligned} x \in A \iff x^2 - 2 \geq 0 \ \text{ et } \ |x-1| < 3 &\iff x^2 \geq 2 \ \text{ et } \ -3 < x-1 < 3 \\ &\iff \left(x \leq -\sqrt{2} \ \text{ ou } \ x \geq \sqrt{2}\right) \ \text{ et } \ -2 < x < 4 \\ &\iff x \in \left(]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[\right) \cap]-2, 4[\\ &\iff x \in]-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 4[. \end{aligned}$$

Ainsi

$$A =]-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 4[.$$

Par conséquent, A est majorée par tout réel supérieur ou égal à 4, et A est minorée par tout réel inférieur ou égal à -2.

(1 point) Étudions maintenant l'ensemble B. On commence par noter que

- si $n \neq 0$ est pair, nous avons

$$(-1)^n = 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

- si $n \neq 0$ est impair, nous avons

$$(-1)^n = -1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq -1 + 1 = 0.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (-1)^n + \frac{1}{n} \in]-1, 0] \ \cup \ \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

Par conséquent, B est majorée par tout réel supérieur ou égal à $\frac{3}{2}$, et B est minorée par tout réel inférieur ou égal à -1.

2. Pour chaque ensemble A et B déterminer, s'il existe, les bornes supérieure et inférieure ainsi que le plus grand et le plus petit élément.

Solution : (1,5 point) Commençons par étudier l'ensemble A. D'après la question précédente, nous avons

$$=]-2, -\sqrt{2}] \ \cup \ [\sqrt{2}, 4[.$$

Donc

$$\sup A = 4 \quad \text{et} \quad \inf A = -2.$$

L'ensemble A ne possède ni de maximum ni de minimum.

(2,5 points) Étudions maintenant l'ensemble B. D'après la question précédente, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (-1)^n + \frac{1}{n} \in]-1, 0] \ \cup \ \left]1, \frac{3}{2}\right].$$

Or

$$\frac{3}{2} = (-1)^2 + \frac{1}{2} \implies \frac{3}{2} \in B.$$

Ainsi, $\frac{3}{2}$ est un majorant de B qui appartient à B. Ce qui nous permet de conclure

$$\sup B = \max B = \frac{3}{2}.$$

Pour trouver la borne inférieure de B, étudions la suite

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$u_k \geq \inf B.$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités larges), on obtient

$$-1 = \lim_{k \to +\infty} u_k \geq \lim_{k \to +\infty} \inf B = \inf B.$$

Or comme -1 est un minorant de B, et $\inf B$ est le plus grand de minorants, on conclut $\inf B \geq -1$. Par conséquent, l'ensemble B ne possède de minimum et

$$\inf B = -1.$$

Exercice 5 : Soit A un sous-ensemble non vide borné de $\mathbb{R}_+$. On définit

$$\sqrt{A} = \left\{\sqrt{x} : \; x \in A\right\}.$$

Montrer que

$$\inf(\sqrt{A}) = \sqrt{\inf(A)}.$$

Solution : (2 points) Comme A est borné et positive, alors $\inf(A)$ existe et il est positif. Comme A est non vide, alors $\sqrt{A}$ l'est aussi. De plus, $\sqrt{A}$ est positive et borné. Donc, $\inf(\sqrt{A})$ existe et positif.

Maintenant, pour tout $x \in A$, $x \geq \inf(A) \geq 0$. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, on en déduit que

$$\sqrt{x} \geq \sqrt{\inf(A)}, \quad \forall x \in A.$$

Donc, $\sqrt{\inf(A)}$ est un minorant de $\sqrt{A}$. Il reste à montrer que $\sqrt{\inf(A)}$ est le plus grand minorant de $\sqrt{A}$. Supposons par absurde qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sqrt{x} \geq \sqrt{\inf(A)} + \epsilon > \sqrt{\inf(A)} \geq 0$. En passant au carré, on obtient

$$x \geq \inf(A) + 2\epsilon\sqrt{\inf(A)} + \epsilon^2 > \inf(A).$$

Ce qui est impossible car $\inf(A)$ est le plus grand minorant de A. Finalement, $\inf(\sqrt{A}) = \sqrt{\inf(A)}$.