NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

a) $\dfrac{3+6i}{3-4i}$.

b) $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{3+6i}{3-4i}$.

c) $\dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 2. On suppose $\theta \in]-\pi;\pi]$. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $z = ie^{i\theta}$.

b) $z = 1 + e^{i\theta}$.

c) $z = \sin(\theta) + i(1+\cos(\theta))$.

Exercice 3. Calculer le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

a) $z = i(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$

b) $z = \dfrac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i}$

Exercice 4. Simplifier les nombres complexes

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{1995} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

Exercice 5. Montrer que

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$$

Exercice 6. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ posons

$$Z = \frac{z+i}{z-2i}.$$

a) Déterminer l'ensemble (E_1) des nombres z tels que Z soit réel.
b) Déterminer l'ensemble (E_2) des nombres z tels que Z soit imaginaire pur.
c) Déterminer l'ensemble (E_3) des nombres z tels que Z ait pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{U}$ dont un argument est dans $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$. Déterminer le module et un argument de

$$Z = \frac{1+z^3}{z^2}.$$

A faire chez soi

Exercice 8. Soit $P = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Montrer que $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D.

Exercice 9. Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ tel que $z \cdot z' \neq -1$. Démontrer par deux méthodes que

$$Z = \frac{z+z'}{1+z\cdot z'} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq b$. Démontrer par deux méthodes que :

$$(a \in \mathbb{U} \quad \text{ou} \quad b \in \mathbb{U}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a-b}{1-\overline{a}b} \in \mathbb{U}.$$

Exercice 11. Exprimer en fonction de $\sin(\theta)$ et de $\cos(\theta)$:
(a) $\sin(4\theta)$
(b) $\sin(5\theta)$

A faire chez soi

(c) $\cos(2\theta)$

(d) $\sin(2\theta)$

(e) $\cos(3\theta)$

Exercice 12. Linéariser :

(a) $\sin^4(\theta)$

(b) $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$

A faire chez soi

(c) $\cos^2(\theta)$

(d) $\sin^2(\theta)$

(e) $\cos^3(\theta)$

Exercice 13. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

(b) En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\theta}{5}\right)$.

Exercice 14. Résoudre d'une manière générale l'équation $e^z = Z$ (d'inconnue z, le nombre complexe $Z \neq 0$ étant fixé) en donnant la forme algébrique des éventuelles solutions.

Exercice 15. Déterminer les racines carrées complexes des nombres suivants :

1. -13.
2. $-3-4i$.
3. $5-12i$
4. $-21-20i$.

A faire chez soi

5. $-7+24i$.
6. $-3+4i$.
7. $1+i\sqrt{3}$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

(b) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$

A faire chez soi

(c) $z^2 + z + 1 = 0$

(d) $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$

Exercice 17.
1. Calculer les racines cubiques de $\frac{-1+i}{4}$ et montrer que l'une d'elles a une puissance quatrième réelle.
2. Calculer les racines 5^{es} de -1.
3. Calculer les racines 8^{es} de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.
4. Résoudre l'équation $\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2}$.

Exercice 18.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 - 1 = 0$ et représenter les solutions.
2. On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   (a) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$.
   (b) Vérifier que $u + u^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $u^2 + u^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2+2x-1=0$ puis calculer

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

A faire chez soi

Exercice 19. On note $\alpha = e^{\frac{i2\pi}{5}}$. On pose $A=\alpha+\alpha^4$ et $B=\alpha^2+\alpha^3$.

a) Justifier que A et B sont les solutions de l'équation

$$(E) : x^2+x-1=0.$$

b) Déterminer A en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.