RELATIONS BINAIRES

ALGÈBRE 2

① DÉFINITION

E et F 2 ensembles,

relation $\mathcal{R}$ de E sur F = donnée d'une partie $\boxed{R \subset E \times F}$

graphe de la relation R

• $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ ssi $(x;y) \in R$.

$\boxed{x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x,y) \in R}$

relation binaire = si $E=F$

rien compris au 1/2 (l'exemple)

② RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

• relation binaire $\mathcal{R}$ sur E = équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et sym. RST

→ l'ens des éléments $x \in E$ en relation avec a est classe d'équivalence de a,

$cl(a)$ ou $[a]$ ou $\bar{a}$.

↳ $\boxed{cl(a) = \{x \in E \ : a \mathcal{R} x\}}$ RST

RAPPEL CONGRUENCE

$n=3$ (modulo 3)

→ $4 \mathcal{R} 1$, $4 \mathcal{R} 7$, $7 \mathcal{R} 10$

$4 \not\mathcal{R} 5$

→ relation d'équ.

• proposition

$\forall x \in E, cl(x) \neq \emptyset$ il y a au ⊖ x ds R.

$\forall x,y \in E$ tq $cl(x) \neq cl(y)$ on a $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$

on écrit aussi : $[x]=[y]$ ou $[x] \cap [y] = \emptyset$

réunion des classes d'équival. valent E :

$$\boxed{E = \bigcup_{x \in E} cl(x)}$$

③ RELATIONS D'ORDRE

relation d'ordre = $\boxed{RAT}$

on note : $\leq$ ou $\preccurlyeq$

$(E, \preccurlyeq)$ est un ens. ordonné

relation d'ordre totale $= x, y \in E$, $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$ (comparables).

"$\leq$" sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$\neq$

relation d'ordre partielle (pas tout comparés)

→ ∅ tout ⇒, ⇐, ⊂ ...

"$\subset$" sur $\mathcal{P}(E)$ généralement

→ $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \preccurlyeq (x',y') \Leftrightarrow x \leq x'$ et $y \leq y'$

ex. $(1,3)$ et $(3,1)$.

relation stricte associée à $\preccurlyeq$

= Soit $\preccurlyeq$ relat° d'ordre sur E

$x, y \in E$, $x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$

ex. par divisibilité sur $\mathbb{N}$,

$\{8; 10; 12\}$ min par 2, par 1

↳ maj par 120, 240 ...

• types de relations :

$A \mathcal{R} B \Longleftrightarrow A \subset B$

donc $R = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) : A \subset B\}$

relation de divisibilité sur entiers relatifs

$\boxed{m \mathcal{R} n \Leftrightarrow m \mid n \ (m \text{ divise } n)}$

→ $R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \mid n \in \mathbb{Z}\}$

relation égalité $\boxed{x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y}$

relations $\leq$ et $<$ sont aussi binaires

→ $\mathcal{R}$ réflexive $= \forall x \in E$, $\boxed{x \mathcal{R} x}$

→ $\mathcal{R}$ transitive $= \boxed{x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z}$

→ $\mathcal{R}$ symétrique $= \boxed{x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x}$

→ $\mathcal{R}$ antisymétrique $= \boxed{x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y}$

relation R = "liste de termes $x \mathcal{R} y$" x est en relation avec y.

$R = \{(1;1) ...\}$ donc $1 \mathcal{R} 1$

ex. "$\subset$" réflexive, tran, anti

"$\leq$" R, T, A.

"$<$" ∅R

divisibilité sur $\mathbb{Z}$ ∅S, A

PRÉ-ORDRES

• relation $\mathcal{R}$ est un pré-ordre si RT

on dit alors que $(E, \mathcal{R})$ = ens. pré ordonné

relation d'ordre = pré-ordre A.

relation d'équivalence = pré-ordre S.

ex. relation de div. en $\mathbb{Z}$ = pré-ordre

∅ sym. $(3 \mid 9$ mais $9 \nmid 3)$

∅ A $(-1 \mid 1$ et $1 \mid -1$, mais $1 \neq -1)$.

MAJORANTS - MINORANTS

• A est une partie de l'ens donné d'un ens. ordonné $(E, \preccurlyeq)$.

• A majorée $= M \in E$, $x \in A$, $x \preccurlyeq M$

M maj. de A

• A minorée $= m \in E$, $x \in A$, $m \preccurlyeq x$

m minorant de A

• A bornée = A maj et min

$m \preccurlyeq x \preccurlyeq M$.

⚠ un maj ou min d'une partie A de E, n'appartient pas forcément à A.

plus grand élément = ou max de A, tout maj de A qui est dans A.
plus petit élément = du min de A, tout min de A qui est dans A.

inf A

THÉORÈME UNICITÉ
Soit $\leq$ relation d'ordre et A partie de E.
A + grand petit élément $\rightarrow$ UNIQUE
$\rightarrow$ le plus grand : max A (resp min A).

- ens des min de A admet + grand élément = borne inf
- ens des maj de A admet + petit élément = borne sup (sup A).
- soit $\leq$ et A partie de E: $\sup(A) = \max(A)$
  $\inf(A) = \min(A)$

DÉFINITION APPLICATION

application = de E vers F, moyen d'associer à chaque élément de x l'unique élément y de F.
$\Gamma \subset E \times F$: $\forall x \in E, \exists! y \in F$
$(x, y) \in \Gamma$. $y = f(x)$

- application identité $= Id_E$
application de E dans E déf par:
$Id_E : E \rightarrow E$
$x \mapsto x$

- application constante = s'il existe $\alpha \in F$ tq $\forall x \in E$, $f(x) = \alpha$,
$f : E \rightarrow F$
$x \mapsto \alpha$

- fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble = E ens et A partie de E. fonction indicatrice de A et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction de E dans $\{0;1\}$

$$\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0;1\}$$
$$x \mapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

- f est à valeurs dans B, si $\forall x \in E$, $f(x) \in B$, ou $Imf \subset B$.

IMAGE RÉCIPROQUE
image réciproque $= f^{-1}(B)$
$= \{x \in E, f(x) \in B\}$ des éléments formée par les antécédents de B

IMAGE DIRECTE, IMAGE RÉCIPROQUE

$\rightarrow y = f(x)$ est l'image de x par f.
E = ens de départ F = ens d'arrivée
$f : E \rightarrow F$
$x \mapsto y = f(x)$
ens des applications $= \mathcal{F}(E, F)$ ou F^E
x : antécédent de y par f.

- famille d'éléments = soient E et I ens
$I = \{1, \dots, n\}$ ou $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$
= famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E.
$f : I \rightarrow E$
$i \mapsto f(i)$
$f(i) = x_i \, (\in E)$
$(x_i)_{i \in I}$.
ex. une suite d'éléments est une famille num d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- égalité entre fonctions:
deux applications f et g sont égales si:
$\rightarrow$ mm ens de départ + arrivée E
$\rightarrow \forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

- image directe = de A par f, notée $f(A)$
$= \{y \in F : \exists a \in A, y = f(a)\}$
$= \{f(a) : a \in A\}$
- image de f = $Im f$ ou $f(E)$

- composée de f par g = application de E dans G, $g \circ f$:
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\Rightarrow$ $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$
$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$
- neutralité de l'identité
$f \circ Id_E = f$ $\forall f \in \mathcal{F}(E, F)$ $\quad Id_E \circ f = f$
$f \circ Id_E = E \xrightarrow{Id_E} E \xrightarrow{f} F$ $\quad Id_E \circ f = E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{Id_E} F$
$x \mapsto x \mapsto f(x)$ $\quad x \mapsto f(x) \mapsto f(x)$
- associativité
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

INJECTIONS - BIJECTIONS - SURJECTIONS
- injective: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
- surjective: $\forall y \in B, \exists x \in A$, $f(x) = y$
- bijective: injective et surjective