ALGÈBRE 1

ENSEMBLES

1 OPÉRATIONS

différence symétrique

$A \Delta B = \{(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B \cup B \setminus A)\}$

différence (= privé de)

$A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}$

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i \in \{1,\dots,n\}} A_i = \{x \in E : \forall i \in \{1,\dots,n\}, x \in A_i\}$

intersection

$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$

- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ A et B disjoints

vocabulaire

union

$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} A_i = \{x \in E : \exists i \in \{1,\dots,n\}, x \in A_i\}$

complémentaire

$A^c = C_A^E = \{x \,;\, x \in E \text{ et } x \notin A\} = E \setminus A$

Symboles ⊂ et ∈

- élément dans un ensemble : ∈
- ensemble dans un ensemble : ⊂

PROPOSITIONS

- l'intersection et union sont $\boxed{\text{commutatives.}}$

$A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

- intersection et union sont $\boxed{\text{associatives.}}$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

- ∀ sous ensemble A de E on a :

$A \cap E = A$

- ∀ sous ensemble A de E on a :

$A \cup \emptyset = A$

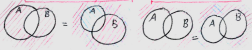
- intersection et union $\boxed{\text{distributives}}$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$ ⚠

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

LOIS DE MORGAN

- $\boxed{(A^c)^c = A}$ et $\emptyset^c = E$ et $E^c = \emptyset$
- si $\boxed{A \subset B, \text{ alors } B^c \subset A^c}$
- $\boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$ et $\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$



LOGIQUES À SAVOIR

- $(A \setminus B) = A \cap B^c$ et $B \subset A \cap B$
- $A \cap B = B \iff A \cap B \subset B$ ⊂ ≠ ∈
- ∪ = ou , ∩ = et
- $(A \cap B)^c \cap (A \cap B) = \emptyset$ → DISTRIBUER AU PLUS VITE ⚠

2 COMPLÉMENTS

PARTITION

$= \{A_1; A_2; \dots; A_n\}$

parties de E vérifiant :

- $\forall k \in \{1;\dots;n\}, A_k \neq \emptyset$
- $\bigcup_{k=1} A_k = E$, réunion des $A_k = E$
- ∀ couple $A_i ; A_j$, $A_i \neq A_j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$ → deux à deux $\boxed{\text{disjoints}}$

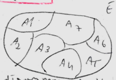


diagramme de Venn

PRODUIT CARTÉSIEN

- A et B deux parties de E

produit cartésien de A et B $= A \times B$

constitué de tous couples $(x; y)$ où

$x \in A$ et $y \in B$

donc :

$\boxed{A \times B = \{(x; y) ; x \in A \text{ et } y \in B\}}$

ex. $C = \{1; 2\}$ et $D = \{1; 2; 3\}$

$C \times D = \{(1;1), (1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (2;3)\}$

- produit cartésien de $A_1, A_2 \dots A_n$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$

- diagonale de A^2 est $\Delta = \{(x, x), x \in A\}$

- propriétés

A, B, C, D parties d'un ensemble E.

$(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$

$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

- NOMBRE PARTIES $A \times B$:

Soit E ens à n éléments

$P(E)$ des parties de E fini, a 2^n éléments

- $(A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$= ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B))$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$