Table des matières

1 Suites et récurrence

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. Une **suite numérique** u est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que :
Il existe un entier naturel n_0 tel que l'ensemble de définition de u est l'ensemble des entiers $n \geq n_0$.

Remarque 1.1. On nomme souvent les suites en utilisant les lettres u et pour écrire les images des entiers $u(n)$, on écrit de préférence u_n. On peut donc alors noter les suites

$$(u_n)_{n \geq n_0}$$

Le **terme initial** de la suite est le terme u_{n_0}.
Le **terme général** de la suite est u_n.
L'entier n est appellé **indice** du terme u_n.

Exemple 1.1. (exemples de suites)

Nom	Définition	Terme initial	Deuxième	Troisième
$(u_n)_{n\geq 0}$	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n+1.$	$u_0 = 1$	$u_1 = 3$	$u_2 = 5$
$(h_n)_{n\geq 0}$	$\forall n \in \mathbb{N}, h_n = 2^n.$	$h_0 = 2$	$h_1 = 4$	$h_2 = 8$
$(k_n)_{n\geq 0}$	$\forall n \in \mathbb{N}, k_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$	$k_0 = 0$	$k_1 = \frac{1}{2} = 0.5$	$k_2 = \frac{3}{4} = 0.75$
$(v_n)_{n\geq 1}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n}.$	$v_1 = 1$	$v_2 = \frac{1}{2} = 0.5$	$v_3 = \frac{1}{3} \approx 0.3333$
$(w_n)_{n\geq 0}$	$w_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 1$	$w_0 = 3$	$w_1 = \frac{5}{2} = 2.5$	$w_2 = \frac{9}{4} = 2.25$
$(t_n)_{n\geq 0}$	$\forall n \in \mathbb{N}, t_n = (-2)^n$	$t_0 = 1$	$t_1 = -2$	$t_2 = 4$
$(s_n)_{n\geq 0}$	$s_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = -\frac{1}{2}s_n.$	$s_0 = 3$	$s_1 = -\frac{3}{2} = -1.5$	$s_2 = \frac{3}{4} = 0.75$

Remarque 1.2. Une suite peut être définie :

1. Soit à partir d'une formule en fonction de n, comme les fonctions suites $(u_n), (h_n), (v_n)$ de l'exemple 1.1
2. Soit à partir d'une formule en fonction d'un ou plusieurs termes précédents (et éventuellement de n), comme les suites $(w_n), (s_n))$ de l'exemple 1.1

Dans le premier cas, on peut calculer n'importe quel terme de la suite rapidement, dans le second cas, il faut calculer tous les termes intermédiaires.

1.1.2 Sens de variation des suites

Définition 1.2. (suite monotone)
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ croissante est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ décroissante est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
Une suite est monotone si elle est croissante ou si elle est décroissante.

Remarque 1.3. La suite est strictement croissante ou décroissante lorsque l'inégalité est stricte.

Exemple 1.2. Les suites $(u_n), (h_n), (k_n)$ sont croissantes, les suites $(v_n), (w_n)$ sont décroissantes, les suites $(t_n), (s_n)$ ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Propriété 1.1. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de façon explicite : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$.
Si la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ la suite est croissante, si la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$, la suite est décroissante.

On dispose donc de plusieurs **méthodes** pour étudier le sens de variation d'une suite :

— étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

— pour une suite à termes strictement positifs, étudier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

— si la suite est du type $u_{n+1} = f(n)$, on peut étudier le sens de variation de f, puis en déduire celui de la suite (mais pas dans le cas où $u_{n+1} = f(u_n)$ la suite w_n de l'exemple 1.1 est un contre-exemple).

Remarque 1.4. Pour démontrer qu'une suite est croissante, il faut démontrer que pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$. Il ne suffit pas de constater que les premiers termes sont en ordre croissant.
Par contre pour démontrer qu'une suite n'est pas croissante il suffit de trouver deux termes en ordre décroissant.

1.1.3 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 1.3. (suites majorées, minorées, bornées)

- Par définition, une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ **majorée** est telle qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$
- Par définition, une suite (u_n) **minorée** est telle qu'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $m \leq u_n$.
- Par définition, une suite **bornée** est majorée et minorée.

Exemple 1.3. On se réfère aux suites de l'exemple 1.1

1. La suite (s_n) est majorée par 1 et 0.
2. La suite (u_n) n'est pas majorée.
3. La suite (k_n) et majorée par 1 et minorée par 0, elle est donc bornée.

Exercice 1.1. Défi : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. Est-elle bornée ? (on pourra programmer le calcul des termes successifs pour tester).

1.2 Suites Arithmétiques et Suite Géométriques

1.2.1 Suites arithmétiques

Définition 1.4. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite "arithmétique" lorsqu'il existe un réel r tels que pour tout entier naturel n $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ (relation de récurrence).

Le réel r s'appelle la **raison** de la suite arithmétique.

$$\boxed{u_0} \rightarrow (+r) \rightarrow \boxed{u_1} \rightarrow (+r) \rightarrow \boxed{u_2} \rightarrow (+r) \rightarrow \boxed{u_3} \rightarrow (+r)$$

Remarque: Montrer qu'une suite est arithmétique revient à montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant ("common difference sequence")

Propriété 1.2. (terme général) Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison r alors
pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = u_0 + nr}$ ← formule du terme de rang n en fonction de n
Plus généralement, pour tout entier naturel k, $\boxed{u_n = u_k + (n-k)r}$

Propriété 1.3. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique si et seulement si elle est définie par $u_n = an + b$.
La raison de la suite u_n est a. Le premier terme $u_0 = b$.

Propriété 1.4. Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La somme de $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.

D'une façon générale, soit m et p deux entiers tels que $m > p$, la somme des termes consécutifs des termes de u_m à u_p est le produit de la moyenne des deux termes extrêmes (u_m et u_p) et du nombre de termes.

Propriété 1.5. (sens de variation)
Soit un réel a. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison a.
Si $a > 0$, la suite est strictement croissante.
Si $a = 0$ la suite est constante.
Si $a < 0$, la suite est strictement décroissante.

1.2.2 Suites géométriques

Définition 1.5. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite "géométrique" lorsque il existe un entier naturel n_0 et un réel q tels que pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$ (relation de récurrence).
Le réel q s'appelle la "raison" de la suite géométrique.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_2} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_3} \xrightarrow{\times q}$$

Remarque: Lorsque l'on est assuré que les termes sont non nuls, montrer qu'une suite est géométrique revient à montrer que u_{n+1}/u_n est constant ("common ratio sequence")

Propriété 1.6. (terme général) Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = u_0 q^n}$ $\leftarrow$ formule du terme de rang n en fonction de n
Plus généralement, pour tout entier naturel k , $\boxed{u_n = u_k q^{n-k}}$.

Propriété 1.7. (admise)
Soit une suite géométique de raison $q \neq 1$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La somme de $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_i = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Remarque 1.5. Pour deux entiers n et p tels que $p < n$,

$$S_n = v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + \ldots + v_n = \sum_{i=p}^{n} v_i = v_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Propriété 1.8. (sens de variation)
Soit un réel q non nul. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q.
Si $q > 1$, si $u_0 > 0$, la suite est strictement croissante, si $u_0 < 0$ la suite est strictement croissante.
Si $0 < q < 1$, si $u_0 > 0$ la suite est strictement décroissante, si $u_0 < 0$ la suite est strictement décroissante.
Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone.

Exemple 1.4. En se référant à l'exemple 1.1
La suite (h_n) est géométrique et croissante car le premier terme est positif et la raison $q = 2 > 1$.
Les suites (t_n) et (s_n) sont géométriques mais ni croissantes, ni décroissantes car leurs raisons, respectivement -2 et $-\dfrac{1}{2}$ sont négatives.

1.3 Raisonnement par récurrence

Propriété 1.9. (Récurrence simple).
Soit $\mathscr{P}($ une propriété portant sur les entiers naturels.
Soit n_0 un entier naturel.
On suppose que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
On suppose également que pour tout entier $n \geq n_0$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
(cela revient à dire que l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie)
Alors pour tout entier $n \geq n_0$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Voici comment doit se faire un raisonnement par récurrence et comment il doit être rédigé :

1. On énonce clairement la propriété $\mathscr{P}$ étudiée.
2. On vérifie que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour n_0 (Initialisation)
3. On se donne un entier $n \geq n_0$ quelconque et on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie (Hypothèse de récurrence).
   On démontre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie (Hérédité)
4. On conclut en annonçant que, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 1.6. Il faut voir le principe de récurrence comme une échelle que l'on essaye de monter :
Si l'on est capable de poser le pied sur le premier barreau et que l'on est capable de passer d'un barreau au suivant, alors on est capable de monter l'échelle en entier. Si l'une des deux conditions manque, alors nous ne pouvons pas monter l'échelle. D'où l'importance de vérifier l'initialisation ET l'hérédité.

Exemple 1.5. Démontrer par récurrence que pour tout $\mathbb{N} \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité $1+2+3+\ +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par $1+2+3+\ +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. Nous avons $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que
$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
   Nous avons supposé que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, donc on peut écrire :
$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$
   Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
4. Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Une erreur classique est d'oublier l'initialisation. L'exemple suivant est un exemple de cette erreur classique.

Exemple 1.6 (FAUX !)**.** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité (fausse) $1+2+3++n = \frac{n^2+n+1}{2}$

1. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$: $1+2+3+\ +n = \frac{n^2+n+1}{2}$
2. L'élève oublie l'initialisation.
3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. Nous devons donc montrer que
$$1+2+3+\ +n+(n+1) = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{2}$$
La fraction est égale à $\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{2} = \frac{n^2+3n+3}{2}$.
De plus
$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1)\\ &= \frac{n^2+n+1}{2}+(n+1)\\ &= \frac{n^2+n+1+2n+2}{2}\\ &= \frac{n^2+3n+3}{2}\\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{2}\end{aligned}$$
Donc l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vrai.
4. Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+\ +\mathbb{N} = \frac{n^2+n+1}{2}$
Vous l'aurez compris, il y a une erreur. Un calcul simple permet de montrer que $\mathscr{P}(1)$ est fausse puisqu'elle stipule que $1 = \frac{3}{2}$. Le premier barreau étant cassé, nous ne pouvons pas monter à l'échelle.

Remarque 1.7. Pour montrer une propriété universelle ($\forall$), c'est à dire montrer que tous les éléments d'un ensemble ont cette propriété, on prend un élément **quelconque** de l'ensemble et on démontre qu'il a la propriété.
On utilise souvent une rédaction du type "Soit....".

Exemple 1.7. Par exemple :
« Pour tout quadrilatère, le quadrilatère non croisé formé par les milieux des segments est un parallélogramme. »
Soit un quadrilatère quelconque, nommons les sommets ABCD et les milieux I, J, K et L respectivement de [AB], [BC],[CD] et [DA].
D'après la propriété de la droite des milieux dans ABC, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. De meme $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}$.
Donc IJKL est un parallélogramme.
Conclusion «**Pour tout quadrilatère**, le quadrilatère non croisé formé par les milieux des segments est un parallélogramme.»

Exemple 1.8. Autre exemple :
« La somme de 3 entiers consécutifs est un multiple de 3.»
("pour tout 3 entiers consécutifs, etc...")
Soit trois entiers consécutifs (quelconques).
On note n le plus petit des trois. La somme est alors $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$ donc est un multiple de 3.
D'où la propriété annoncée.

Remarque 1.8. Pour montrer $P \Rightarrow Q$ que faut-il montrer ?

Table de vérité de l'implication

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Donc si P est faux, l'implication est toujours vraie (un P faux peut donner n'importe : quoi Q vraie et Q faux conviennent). Pour montrer l'implication, il suffit de montrer qu'elle n'est pas fausse, cela n'arrive que dans un seul cas : quand P est vraie et Q est faux. Donc on va vérifier que «si P est vraie, Q est vraie aussi».
Donc pour montrer $P \Rightarrow Q$ on rédige :«**Supposons** P vraie, montrons Q vraie.»

Exemple 1.9. Si n est impair alors n^2 est impair.

Supposons n pair, $n = 2 \times p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Donc $n^2 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ donc n^2 est impair.
L'implication est donc vraie.

Exercice 1.2. Démontrer une formule

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 5$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$

Remarque 1.9. Penser à utiliser la calculatrice (application suite) pour vérifier que la formule est correcte

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$

- $\dfrac{1}{2}(5 - 3^0) = \dfrac{1}{2}(5 - 1) = 2 = u_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.(Vérification au premier rang)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. C'est à dire $u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$.
  On veut montrer que pour tout n, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, on a $\mathscr{P}(n+1)$ vraie. On choisit donc un n quelconque, on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on va essayer de montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Puisque n était quelconque, on a bien démontré que pour tout n, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  On veut montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(5 - 3^{n+1})$ On a $u_{n+1} = 3u_n - 5 = 3\left(\dfrac{1}{2}(5 - 3^n)\right) - 5$
  $= \dfrac{15}{2} - \dfrac{3^{n+1}}{2} - 5 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3^{n+1}}{2}$
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Donc par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$.

1.4 Convergence - Divergences de suites

1.4.1 Définitions

Définition 1.6. Une suite numérique admet le réel l comme limite lorsque pour tout intervalle ouvert qui contient l, il existe un entier n_0 tel que pour tous les entiers $n > n_0$, u_n appartient à I.
Cela revient, en écriture symbolique, à :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R} > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, u_n \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$$

Définition 1.7. Une suite numérique admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque pour tout intervalle ouvert I de la forme $]a;+\infty[$ (de la forme $]-\infty;a[$), il existe un entier n_0 tel que pour tous les entiers $n > n_0$, u_n appartient à I.
Cela revient, en écriture symbolique, à :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, u_n \in]a;+\infty[$$

Définition 1.8. Par définition,
Une suite **convergente** admet une limite **finie**.
Une suite **divergente** est une suite qui n'est pas convergente.

Remarque:
Il y a deux suites de type convergentes :

— Les suites monotones. Dans l'exemple 1.1 : $(k_n), (v_n), (w_n)$ ou $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

— Les suites qui ne sont pas monotones. Dans l'exemple 1.1 : (s_n) ou $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Il y a deux types de suites divergentes :
— les suites qui ont pour limite $+\infty$ ou $-\infty$. Dans l'exemple 1.1 : $(u_n), (h_n)$ ou $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
— les suites qui n'ont pas de limite. Dans l'exemple 1.1 : (t_n) ou $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

<table>
<tr><td colspan="2">UNE LIMITE</td><td>PAS DE LIMITE</td></tr>
<tr><td>FINIE</td><td>INFINIE</td><td></td></tr>
<tr><td>CONVERGENTE</td><td colspan="2">DIVERGENTE</td></tr>
</table>

1.4.2 Propriétés sur les limites

Propriété 1.10. Si une suite admet une limite (finie ou infinie), alors celle-ci est unique.

Remarque 1.10. Une suite convergente n'est pas nécessairement monotone. Par exemple $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Propriété 1.11. Si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l.

Théorème 1.1. (Convergence des suites monotones bornées)
Toute suite monotone et bornée converge.
Autrement dit :

- Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle converge.
- Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors elle converge.

Propriété 1.12. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans I et soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers une limite l alors l vérifie l'équation $l = f(l)$

Théorème 1.2. (Divergence des suites monotones non bornées)
Si (u_n) est une suite croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Si (u_n) est une suite décroissante et non minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

1.4.3 Théorèmes de comparaisons

Théorème 1.3. (Théorème des gendarmes ou de l'encadrement)
Soit (u_n), (v_n), (w_n) des suites et un réel l tels que :
- Il existe p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
- (u_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$
- (w_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} w_n = l$

La suite (v_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} v_n = l$

Propriété 1.13. *Théorème de comparaison*
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

1. *$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.*
2. *u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2 Fonctions

2.1 Limite d'une fonction au voisinage de l'infini.

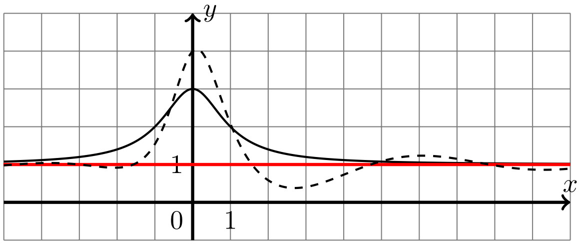
2.1.1 Limite finie - Asymptote horizontale

On énoncera les propriétés seulement pour $x \to +\infty$ (transposition facile pour $x \to -\infty$).
Soit un réel m et f une fonction définie sur $[m; +\infty[$

Définition 2.1. Soit l un réel.
Dire que $f(x)$ **tend vers** l quand x **tend vers** $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert I contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour tout réel $x > x_0$, $f(x) \in I$.
Cela revient en écriture symbolique à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \in]A; +\infty[\Rightarrow f(x) \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$$

On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$



Exemple 2.1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$

Définition 2.2. Quand $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ on dit que la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}_f$ vers $+\infty$.

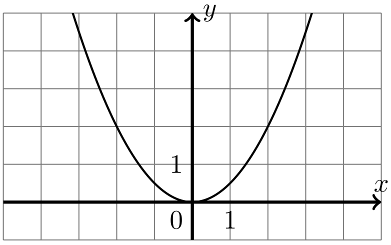
2.1.2 Limite infinie - Asymptote Oblique

Définition 2.3. Dire que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ quand x **tend vers** $+\infty$ signifie que pour tout réel M, , il existe un réel x_0 tel que pour tout réel $x > x_0$, $f(x) > A$
Cela revient en écriture symbolique à :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, x \in]A; +\infty[\Rightarrow f(x) \in]M; +\infty[$$

Dire que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ quand x **tend vers** $+\infty$ signifie que pour tout réel M, il existe un réel x_0 tel que pour tout réel $x > x_0$, $f(x) < A$.
Cela revient en écriture symbolique à :

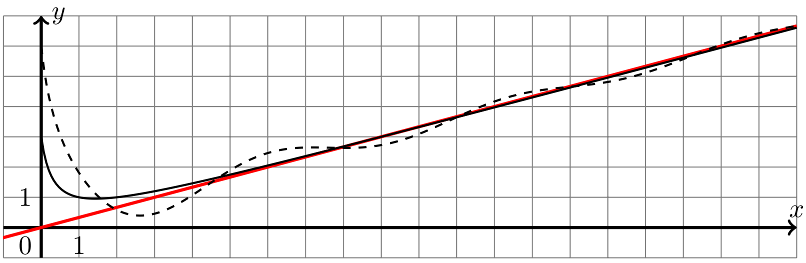
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, x \in]A; +\infty[\Rightarrow f(x) \in] - \infty; M[$$



Exemple 2.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2} = +\infty$

Définition 2.4. Soit a et b deux réels , a non nul. Quand $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe $\mathscr{C}_f$ vers $+\infty$.

Remarque 2.1. Attention : toute courbe représentative d'une fonction “définie” en $+\infty$ n'admet pas nécessairement une asymptote : la parabole (fonction carré)



Exemple 2.3. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$, on écrit $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 3}$; on trouve $f(x) = x + \dfrac{1}{x - 3}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - 3} = 0$ et également $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - 3} = 0$ la droite d'équation $y = x$ est une **asymptote oblique** à la courbe $\mathscr{C}_f$

2.2 Limite d'une fonction en un réel

2.2.1 Limite infinie - Asymptote verticale

Soit un réel a. Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$. Soit f une fonction définie sur I en excluant éventuellement le point a.

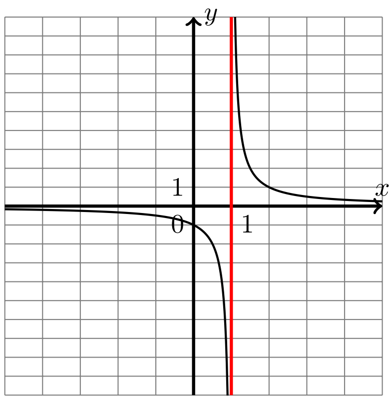
Définition 2.5. Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a signifie que pour tout réel M, il existe un intervalle I contenant a tel que pour tout réel de I, $f(x) > M$.
Cela revient en écriture symbolique à :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, x \in]a-\alpha; a+\alpha[\Rightarrow f(x) \in]M; +\infty[$$

Dire que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a signifie que pour tout réel M, il existe un intervalle I contenant a tel que pour tout réel de I, $f(x) < M$.
Cela revient en écriture symbolique à :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, x \in]a-\alpha; a+\alpha[\Rightarrow f(x) \in]-\infty; M[$$

On définit de la même manière les limites à gauche ou à droite de a.



Définition 2.6. Quand $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ est infinie on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathscr{C}$.

2.2.2 Limite finie

Définition 2.7. Soit l un réel.
Dire que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a signifie que pour tout intervalle J contenant l, il existe un intervalle I contenant a tel que pour tout réel de I, $f(x)$ appartient à J.

Cela revient en écriture symbolique à :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \in]a-\alpha; a+\alpha[\Rightarrow f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$$

2.3 Limites de référence

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Si n pair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	Si n impair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2.4 Opérations Algébriques

2.4.1 Cas général

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, permettent de connaître les limites des fonctions $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ lorsque l'on connaît celle de f et celle de g.
Les limites des fonctions f et g sont prises soit en $+\infty$ soit en $-\infty$, soit en un réel a.
l et l' sont des nombres réels. Les cases barrées signalent les cas ou il n'y a pas de conclusion en général, on dit qu'il s'agit de **formes indéterminées**. Dans tous les autres cas, les résultats, que **nous admettrons**, sont intuitifs et faciles à retenir.

Limite d'une somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un produit

si f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors fg a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Limite d'un quotient
Cas où la limite d'un dénominateur g n'est pas nulle.

si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
et si g a pour limite	$l' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où la limite d'un dénominateur g est nulle.

si f a pour limite	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et si g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Etude des limites de $\dfrac{A}{B}$

B \ A	$-\infty$	$m<0$	0	$m>0$	$+\infty$
$-\infty$	FI	0	0	0	FI
$l<0$	$+\infty$	$\frac{m}{l}$	0	$\frac{m}{l}$	$-\infty$
0	sgn	sgn	FI	sgn	sgn
$l>0$	$-\infty$	$\frac{m}{l}$	0	$\frac{m}{l}$	$+\infty$
$+\infty$	FI	0	0	0	FI

sgn signifie qu'il faut étudier le signe avant de conclure.
FI signifie forme indéterminée : il faut écrire l'expression différemment pour pouvoir conclure.

2.4.2 Cas particuliers des formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront. Ces cas sont au nombre de quatre :

$$"\infty-\infty" \text{ , } "0\times\infty" \text{ , } "\frac{\infty}{\infty}" \text{ , } "\frac{0}{0}"$$

Méthodes Comment lever une forme indéterminée :

Dans les exercices qui suivent on admettra l'existence d'une limite.

Le cas "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

- On peut factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme le plus "influent".

Exemple 2.4. Déterminer les limites (si elles existent) des expressions suivantes :

$\dfrac{1-2x}{x-5}$ en $+\infty$.

On a $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1-2x}{x-5}=\dfrac{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}=\dfrac{\frac{1}{x}-2}{1-\frac{5}{x}}$.

Donc la limite est -2

$\dfrac{1-x^3}{1+2x^2}$ en $+\infty$.

On a $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1-x^3}{1+2x^2}=\dfrac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+2\right)}=x\dfrac{1-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+2}$ donc la limite est $+\infty$

Propriété 2.1. Soit une fonction polynôme P de monôme de plus haut degré ax^n(a réels non nul, n un entier naturel)
P admet en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) une limite qui est égale à la limite de ax^n.

Propriété 2.2. Soient R une fonction rationnelle d'ensemble de définition D et deux polynômes P et Q tels que $\forall x \in D, R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
Sachant que P et Q admettent pour monômes de plus haut degré respectivement ax^n et bx^m (a, b réels non nuls, n, m deux entiers naturels).
R admet en $+\infty$ et $-\infty$ une limite qui est égale à la limite de la fonction rationnelle $\dfrac{ax^n}{bx^m}$.

Remarque: Cette propriété ne s'applique qu'à un quotient de polynômes.
Le cas "$\infty - \infty$"

- On peut factoriser par le terme le plus "influent"
- Pour les expressions avec radicaux, on peut utiliser l'expression conjuguée (voir Section 4)

Exemple 2.5. $3x^5 - 2x^4 + x^8$ en $-\infty$.
$3x^5 - 2x^4 + x^8 = x^8\left(\dfrac{3}{x^3} - 2\dfrac{1}{x^4} + 1\right)$

Le cas "$\dfrac{0}{0}$"

- Lorsqu'on prend la limite en a on peut factoriser $(x - a)$ au numérateur et dénominateur, puis simplifier.
- Pour les expressions avec des radicaux, on peut utiliser l'expression conjuguée (voir Section 4)

Exemple 2.6. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ en 1.
$\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$.
$\dfrac{x^2 - x}{-2x + 2}$ en 1.
$\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-1)^2}{-2(x-1)} = \dfrac{x}{-2}$.

2.5 Théorème de comparaison

l et l' désignent deux réels. a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 2.1. (théorème de comparaison) Soit f et g deux fonctions telles que pour tout x assez proche de a, $f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$.

Théorème 2.2. Soit f et g deux fonctions telles que pour tout x assez proche de a, $f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 2.7. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\cos x - x^3$
On a $\forall x \in \mathbb{R}^+, x\cos x - x^3 < x - x^3$. Donc comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x - x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\cos x - x^3 = -\infty$

Théorème 2.3. (Théorème des gendarmes)
Soit f, g et h trois fonctions telles que pour tout x assez proche de a, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si f et h admettent une limite en a égale à l **alors** g admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Remarque 2.2. Ce théorème est souvent utiliser avec des limites utilisant des fonctions trigonométrique ($\sin, \cos$ et $\tan$)

2.6 Limite d'une fonction composée en a

Définition 2.8. Soit I et J deux intervalles.
Soit g une fonction définie sur J et u une fonction définie sur I telles que
pour tout x de I, $u(x)$ appartient à l'intervalle J.
La fonction f définie pour tout élément de I par $f : x \mapsto g(u(x))$ est appelée "composée" de u suivi de g.

Cela correspond au "montage" : $x \overset{u}{\to} u(x) = U \overset{g}{\to} g(U) = g(u(x))$

Remarque 2.3. On la note $g \circ u$.
On considère les fonctions g et u telles que leur composée existe $g(u)$

Théorème 2.4. a, b c sont des réels ou bien ils désignent $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et que $\lim\limits_{U\to b} g(U) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(u(x)) = c$

Exemple 2.8. On veut déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}+4}$
On décompose $x \overset{u}{\to} \dfrac{1}{x}+4 = U \overset{g}{\to} \sqrt{U} = \sqrt{\dfrac{1}{x}+4}$
On calcule les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}+4 = 4$ et $\lim\limits_{U\to 4} \sqrt{U} = 2$
d'où par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}+4} = 2$

Formes indéterminées avec radicaux
On utilise la propriété suivante :

Propriété 2.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x^2} = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $\sqrt{x^2} = -x$

Déterminer les limites (si elles existent) des expressions suivantes.
• $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
Si x positif, $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{x^2}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)} = \dfrac{x}{\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)}$ donc la limite en $+\infty$ est $+\infty$
Si x négatif, $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{x^2}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)} = -\dfrac{x}{\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)}$ donc la limite en $-\infty$ est $+\infty$

• $\sqrt{x^2+1} - 2x$ en $+\infty$
• $x - \sqrt{x}$ en $-\infty$.

• $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

• $\sqrt{4x^2+1} - 2x$ en $+\infty$
$\sqrt{x^2+2} - 2x + 3$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\sqrt{x^2+2} - x$ en $+\infty$.

$\dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ en 1.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+3x+1} - 2x = \dfrac{3}{4}$

Propriété 2.4. (Quelques limites à connaître)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

3 Continuité d'une fonction

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1. Soit a un réel, soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant a.
• f est continue en a quand $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

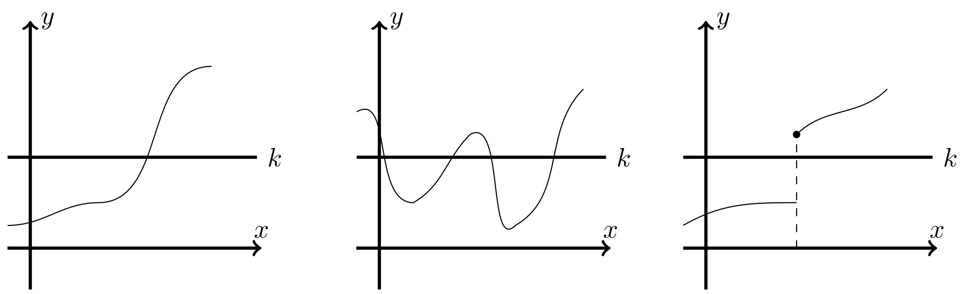
• f est continue sur un intervalle I lorsque f est continue pour tout a de I.

Remarque 3.1. Lorsque la courbe représentative de f se trace sans lever le crayon (ne présente pas de saut) f est continue sur I.

3.2 Continuité et opérations

Propriété 3.1. (admise)
Les fonctions de référence sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
Les sommes, produits, quotients ou composées des fonctions continues sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
En particulier, les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

3.3 Le théorème des valeurs intermédiaires



Fonctions continue monotone   Fonction continue   Fonction discontinue

Théorème 3.1. (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque 3.2. Ce théorème peut être démontré à l'aide des suites adjacentes.

Propriété 3.2. (image d'un intervalle par une fonction continue)
Soit f un fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
L'image d'un intervalle est un intervalle.

Théorème 3.2. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a;b]$ (il existe un unique réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$).

x	a	c	b
var. de $x \mapsto f$	$f(a)$	k	$f(b)$

x	a	c	b
var. de $x \mapsto f$	$f(a)$	k	$f(b)$

Fonctions croissante — Fonctions décroissante

Remarque 3.3. Extension du théorème : on admet que ces théorèmes restent vrais pour tout type d'intervalle (fini ou infini, ouvert ou semi-ouvert) en remplaçant les images par les limites.

Exemple 3.1. Soit $f(x) = x^3 - 12x$ définie sur $\mathbb{R}$. Son tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$-\infty$	16	-16	$+\infty$

Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = -1$; de $f(x) = k$
pour $k < -16$ une solution ;
$k = -16$ deux solutions ;
pour $-16 < k < 16$ trois solutions ;
pour $k = 16$ deux solutions ;
pour $16 < k$ une solution ;

4 Dérivation

4.1 Généralités

Définition 4.1. Soit une fonction f définie sur un intervalle contenant a.
On dit que f dérivable en a quand le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite en a. Le nombre dérivée est la limite de ce taux et est noté $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ou bien

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple 4.1. Démontrer que la fonction inverse est dérivable en 2.

Propriété 4.1. Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente.
L'équation de cette tangente est donc

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple 4.2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 2.

Définition 4.2. Une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
Dans ce cas on appelle dérivé la fonction $x \mapsto f'(x)$

Exemple 4.3. Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$. Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$

4.2 Opérations algébriques

Théorème 4.1. Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Les fonctions $u + v$, ku et uv sont dérivables sur I.
Si v ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I.
On a alors :

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ et } (ku)' = ku'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ et } \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

4.3 Formules de calculs des dérivées

Tableau des fonctions dérivées pour les fonctions de référence

Fonction f	D_f	Fonction f'	D'_f
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^{-*})$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$

Tableau de dérivation des fonctions composées

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

Fonction f	conditions d'existence de f	Fonction f'	conditions d'existence de f'
$f = u^2$		$f' = 2uu'$	
$f(x) = u^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$		$f'(x) = nu^{n-1}u'$	
$f = \frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$	$f' = -\frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$
$f = u^n$ $(n \in \mathbb{Z}^{-*})$	$u(x) \neq 0$	$f' = nu^{n-1}u'$	$u(x) \neq 0$
$f = \sqrt{u}$	$u(x) \geq 0$	$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$
$f = \sin(u)$		$f' = \cos(u)u'$	
$f = \cos(u)$		$f' = -\sin(u)u'$	
$f = e^u$		$f' = e^u u'$	
$f = \ln u$		$f' = \frac{u'}{u}$	

Propriété 4.2. Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.

Remarque 4.1. Chacune de ces formules se démontre en déterminant la limite du taux de variation en x. Voir par exemple la démonstration de la formule pour la fonction sinus.

4.4 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 4.2. (admis) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable en tout réel $u(x)$ avec $x \in I$.

Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ est dérivable sur I et, pour tout x de I

$$f'(x) = g'(u(x))u'(x)$$

Propriété 4.3. Soit a et b deux réels, soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit J un intervalle tel que $\forall x \in J, ax + b \in I$. La fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable et

$$g'(x) = af'(ax + b)$$

4.5 Lien entre fonction et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Théorème 4.3. Signe de la dérivée et sens de variations de la fonction
• f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
• Si f' est strictement positive sur I, à l'exception d'un nombre fini de réels où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I.
• Si f' est strictement négative sur I, à l'exception d'un nombre fini de réels où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème 4.4. Zéro de la dérivée et extremum local de la fonction
• Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$
• Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.

Propriété 4.4. Toute fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante.

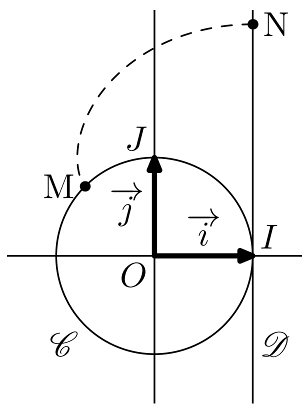
5 Fonctions Sinus et Cosinus

5.1 Rappel : Repérage sur le cercle

5.1.1 Définitions

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit I le point de coordonnées (1,0).
Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par I parallèle à l'axe des ordonnées, munie du repère $(I, \vec{j})$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
A tout réel x, on associe le point N d'abscisse x sur la droite $\mathscr{D}$.
Lorsque l'on "enroule" la droite sur le cercle (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre), le point N coïncide avec un point M situé sur le cercle $\mathscr{C}$.

On a donc défini un repère sur le cercle $\mathscr{C}$ dont l'origine est I. L'abscisse d'un point dans ce repère est appelée **abscisse curviligne**.



Définition 5.1. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon 1 muni d'un tel repère est appelé le cercle trigonométrique.

Propriété 5.1. Tout point du cercle est reperé de manière unique par un réel compris dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ (ou dans tout intervalle d'amplitude 2π).

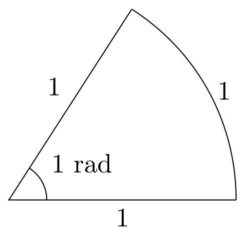
Remarque 5.1. Un point du cercle peut être repéré avec une infinité de réels : si un point M du cercle est associé au réel x, il est aussi associé à l'ensemble des réels de la forme $x+2k\pi$ où k est entier.

Exemple 5.1. Le point associé au réel $\frac{\pi}{4}$ est aussi associé aux réels $\frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$.

Définition 5.2.

Le **radian** est la mesure de l'angle du secteur d'un cercle tel que la longueur de l'arc est égale au rayon.

On note un angle en radian «1 rad» ou «1» (sans unité).



Remarque 5.2. Sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc et la mesure de l'angle en radian coïncident.

Remarque 5.3. Un angle de mesure 360° (degrés) correspond à un angle de mesure 2π radians puisque le périmètre d'un cercle de rayon 1 est 2π.

Propriété 5.2. Les mesures des angles en degrés et les mesures des angles en radians sont proportionnelles avec un facteur de proportionnalité de $\frac{\pi}{180}$.

Angle exprimé en degré ⇒ en radian : multiplier par $\frac{\pi}{180}$.

Angle exprimé en radian ⇒ en degré : multiplier par $\frac{180}{\pi}$.

Remarque 5.4. Intérêt des radians.
Si l'on souhaite calculer la longueur d'un arc de cercle correspondant à un secteur de 86 degrés. On construit le tableau de proportionnalité suivant :

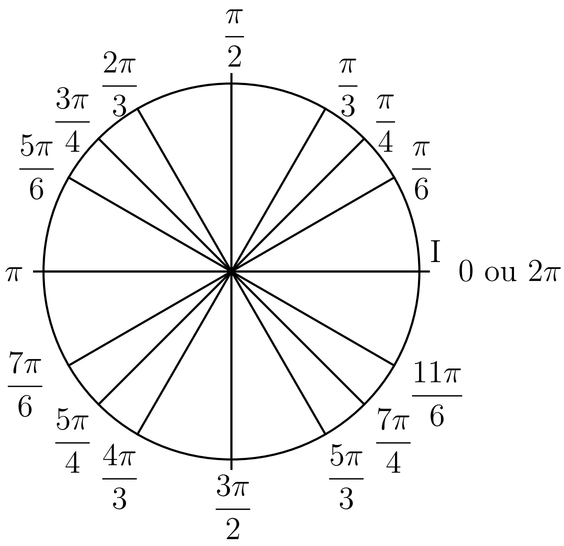
360	86
2πR	l

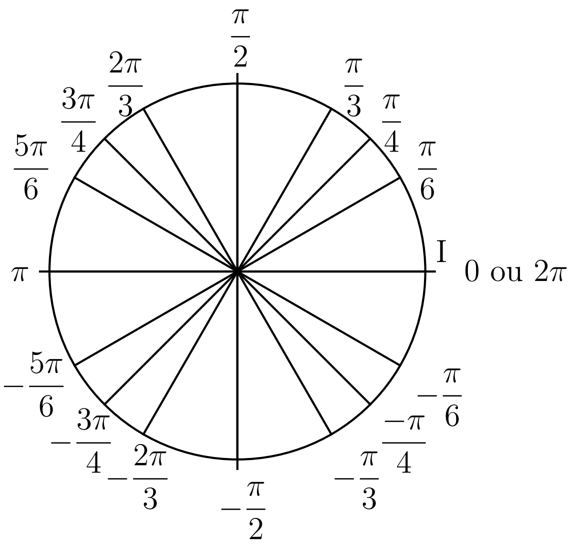
On en déduit que $l=\frac{2\pi}{360}86R$ or $\alpha=\frac{2\pi}{360}86$ est la mesure de l'angle en radian donc $l=\alpha R$.

Correspondance Degrés - Radians

degrés	0	30	45	60	90	180
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

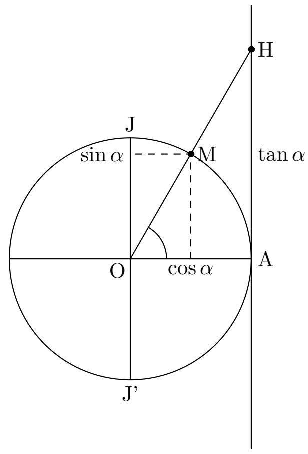
5.1.2 Position des angles remarquables sur le cercle trigonométrique.





Exercice 5.1. Placer sur le cercle trigonométrique les angles suivants :
$5\pi, -\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{5\pi}{3}, -534\pi, -\frac{99\pi}{2}$

5.2 Définition de sinus et cosinus



Définition 5.3. A tout réel x, on associe le point M repéré par x sur le cercle trigonométrique.
L'abscisse de ce point dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé cosinus de x (noté $cos(x)$), l'ordonnée de ce point est appelé sinus de x (noté $sin(x)$).

On peut donc définir deux fonctions : $x \mapsto cos(x)$, $y \mapsto sin(x)$.

Remarque: Pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, les fonctions cosinus et sinus correspondent aux notions rencontrées en troisième.

Propriété 5.3. Quelques valeurs des sinus et cosinus.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

5.3 Formules Trigonométriques

Propriété 5.4. Les fonctions sinus et cosinus sont telles que pour tout réel x,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Cette relation est connue sous le nom de "relation fondamentale de la trigonométrie".

Propriété 5.5. Pour tout réel x

$\cos(x+2\pi) = \cos x$	$\sin(x+2\pi) = \sin x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\sin(x+\pi) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

5.4 Fonctions Trigonométriques

5.4.1 Définitions

Définition 5.4. A tout réel x, on peut associer le sinus de x en radian. La fonction correspondante s'appelle la fonction sinus et est notée sin.

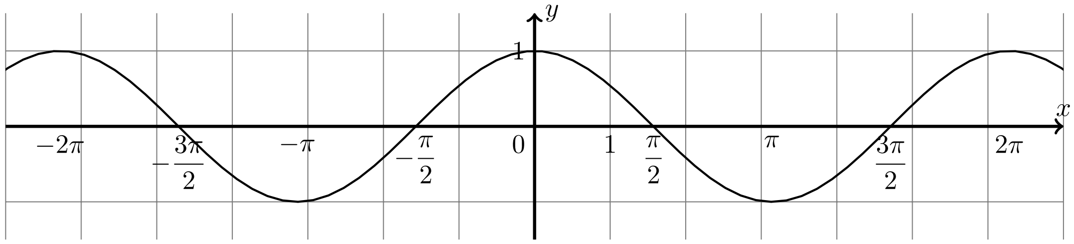
Définition 5.5. A tout réel x, on peut associer le cosinus de x en radian. La fonction correspondante s'appelle la fonction cosinus et est notée cos.

5.4.2 Propriété

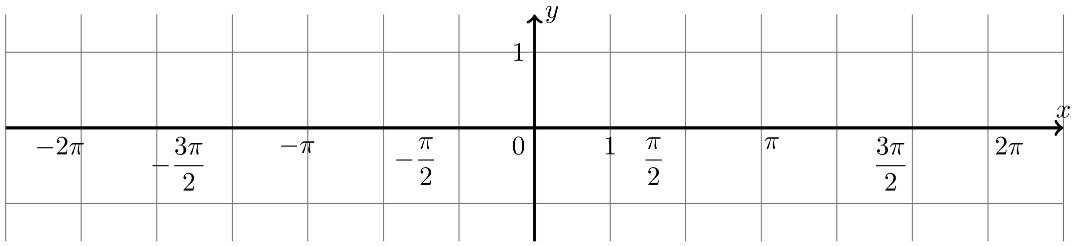
Définition 5.6. (Rappel)
Soit un réel T. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique**, s'il existe un réel T tel que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.
La période T d'une fonction périodique est le plus petit réel non nul qui vérifie la propriété.

$$T = min\{T \in \mathbb{R}, \forall x \in R, f(x+T) = f(x)\}$$

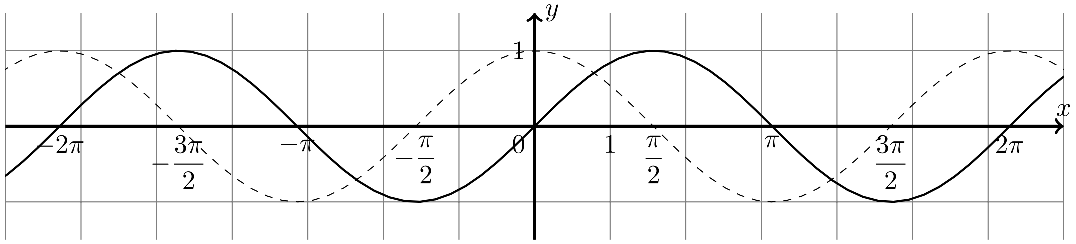
Propriété 5.6. Fonction cosinus
- La fonction cosinus est paire.
- La fonction cosinus ($x \mapsto cos(x)$) est une fonction périodique de période 2π.
- Pour tout réel x, $-1 \leq cos(x) \leq 1$.



Propriété 5.7. Fonction sinus
- La fonction sinus est impaire.
- La fonction sinus ($x \mapsto sin(x)$) est une fonction périodique de période 2π.
- Pour tout réel x, $-1 \leq sin(x) \leq 1$.



Les fonctions sin et cos n'admettent pas de limite en $+\infty$ ou $-\infty$



5.4.3 Représentation graphique des fonctions trigonométriques

Définition 5.7. Soit une fonction f définie sur D_f une partie de $\mathbb{R}$

- La fonction f est dite **paire** lorsque :
  - Pour tout x de D_f, $-x$ appartient à D_f.
  - Pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.
- La fonction f est dite **impaire** lorsque :
  - Pour tout x de D_f, $-x$ appartient à D_f.
  - Pour tout x de D_f, $f(-x) = -f(x)$.

Théorème 5.1. Une fonction est paire <u>**ssi**</u> sa représentation graphique dans un repère <u>orthonormé</u> (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$) admet l'axe Ox pour axe de symétrie.
Une fonction est impaire <u>**ssi**</u> sa représentation graphique dans un repère <u>quelconque</u> (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$) admet l'axe O pour centre de symétrie.

Exemple 5.2. La fonction carré est paire.
La fonction inverse est impaire.