Algèbre-Premier semestre 2021

Algèbre-Premier semestre 2021

Thèmes

- Logique et raisonnement
- Ensembles
- Relations binaires
- Applications
- Nombres complexes
- Polynômes
- Fractions rationnelles

Applications

Définition (Application)

Soient E et F deux ensembles.
Une **application** *f de E vers F est une relation qui associe, à chaque élément de E un* **unique** *élément de F.*
Plus formellement, on appelle **application** *(ou* **fonction***) de E dans F toute relation f dont le graphe $\Gamma \subset E \times F$ est tel que :*

$$\forall x \in E, \ \exists! y \in F, \quad (x, y) \in \Gamma$$

*E est l'***ensemble de départ** *de f et F est l'***ensemble d'arrivée** *de f.*

Définition (image, antécédent)

Soit f une application de E dans F, $x \in E, y \in F$.
Si $(x, y) \in f$, on note $y = f(x)$, et on dit que
*$y = f(x)$ est l'***image** *de x par f*
*et x est l'***antécédent** *de y par f.*

On note $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & y = f(x). \end{array}$

Applications

Définition (Graphe d'une fonction)

On appelle **graphe de l'application** f *le sous-ensemble* Γ *de* $E \times F$ *défini par :*

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in E\}.$$

Remarque Une fonction est définie par des couples.
Si l'ensemble des couples est modifié, on n'a pas le même graphe, on ne définit plus la même fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} [0;2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$ ne sont pas les mêmes fonctions

Définition (Ensemble d'applications)

L'ensemble des applications de E *dans* F *est noté* $\mathscr{F}(E, F)$ *ou* F^E.

Proposition

Soit E *et* F *deux ensembles finis* $card(F^E) = card(F)^{card(E)}$.

Applications

Exemples d'applications :

- **Application identité** : On appelle application identité d'un ensemble E, et on note Id_E, l'application de E dans E définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_E : E &\to E \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

- **Application constante** : Une application $f : E \to F$ est dite constante s'il existe $\alpha \in F$ tel que $\forall\ x \in E,\ f(x) = \alpha$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto \alpha. \end{aligned}$$

Applications

Exemples d'applications (suite) :

Définition (Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble)

Soit E un ensemble et A une partie de E.
On appelle **fonction indicatrice** *de A et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction de E dans $\{0,1\}$ définie par :*

$$\begin{aligned} f : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A, \\ 0 & si\ x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Applications

Exemples :

Définition (Famille d'éléments)

Soit E un ensemble et I un ensemble.
On appelle **famille d'éléments de** *E indexée par I toute application de I dans E*

$$\begin{aligned} f : I &\to E \\ i &\mapsto f(i) \end{aligned}$$

On note

$$f(i) = x_i \quad (\in E).$$

On représente un telle famille par $(x_i)_{i \in I}$.

Remarque : Une suite numérique est une famille d'éléments de $E = \mathbb{R}$ avec $I = [\![n_0 ; +\infty [\![$ et $n_0 \in \mathbb{N}$

Image directe, Image réciproque

Définition

Deux applications f et g sont égales si

- *elles ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée, et*
- *si pour tout $x \in E$, on a* $\qquad f(x) = g(x)$.

Définition (Image directe d'une partie, image d'une application)

Soit $f : E \to F$ une application.

- *Pour toute partie A de E, on appelle* **image (directe)** *de A par f, notée $f(A)$, l'ensemble :*

$$f(A) = \{y \in F : \exists a \in A,\ y = f(a)\} = \{f(a) : a \in A\}.$$

- *L'***image de** *f et est notée généralement $\mathrm{Im} f$ plutôt que $f(E)$.*

Image directe, Image réciproque

Exemple :

- L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}_+$.
  L'image de $[0, 3[$ par cette même fonction est $[0, 9[$.
- L'image de

$$\pi\mathbb{Z} = \{\cdots\ ,\ -2\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi\ ,\ \cdots\}$$

  par la fonction

$$x \mapsto \sin x$$

  est le singleton $\{0\}$.
  L'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$.
  et l'image de $[-\pi/2, \pi/2]$ est $[-1, 1]$.

Image directe, Image réciproque

Définition (Expression « à valeurs dans $\cdots$ »)

Soient $f : E \to F$ une application et B une partie de F.
On dit que f est **à valeurs dans** *B si toute valeur de f est élément de B, i.e. si*

$$\forall x \in E,\ f(x) \in B,$$

ou encore si

$$\mathrm{Im} f \subset B.$$

Remarque : En général, $\mathrm{Im} f$ est plus petit que F ($\mathrm{Im} f \subset F$).

Image directe, Image réciproque

Étudions comme l'image directe réagit par rapport à certaines opérations sur les ensembles.

Proposition

Soit $f : E \to F$. Soit A et B deux parties quelconques de E. On a

- $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$.
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(\emptyset) = \emptyset$ *et* $f(\{a\}) = \{f(a)\}$.
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Remarque : L'inclusion est stricte :

$A \cap B = \emptyset$ mais $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$

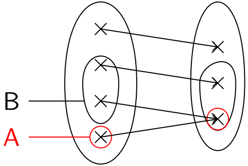

Image directe, Image réciproque

Définition (Image réciproque d'une partie)

Soient $f : E \to F$ une application et B une partie de F.
*L'***image réciproque** *de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

C'est la partie de E formée par les antécédents des éléments de B.

Remarque :

- On peut écrire $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.
- On a

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad f^{-1}(F) = E.$$

Pour tout $b \in F$

$$f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E : f(x) = b\}.$$

Par conséquent, si $b \notin \mathrm{Im} F$ on a $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$.

Image directe, Image réciproque

Exemple :

- L'image réciproque de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est $\mathbb{R}$ tout entier.
- L'image réciproque de $[9, 25[$ par la fonction carrée est$[-5, -3[\cup [3, 5[$.
- L'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction sinus est

$$\pi\mathbb{Z} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

L'image réciproque de $[4, 6]$ est l'ensemble vide.

Image directe, Image réciproque

Étudions maintenant comme l'image réciproque réagit par rapport à certaines opérations sur les ensembles.

Proposition

Soit $f : E \to F$. Soit $A \subset E$ et $B \subset E$. On a

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$.

Opérations sur les applications

Introduisons certaines opérations qui vont nous permettre de créer de nouvelles applications.

Définition (Composition)

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. La **composée de f par g** *est l'application de E dans G, notée $g \circ f$ et définie pour tout $x \in E$ par*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f : & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Remarque : La composition, en général, n'est possible que dans un seul sens, et quand elle est possible dans les deux, on n'a aucune raison d'avoir :

$$f \circ g = g \circ f.$$

Opérations sur les applications

Remarque :

La composition, en général, n'est possible que dans un seul sens, et quand elle est possible dans les deux, on n'a aucune raison d'avoir :

$$f \circ g = g \circ f.$$

Exemple

- Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $E = \mathbb{R}$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^+$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$ définie sur $F = \mathbb{R}^+$ à valeurs dans $G = \mathbb{R}$.

  Alors $g \circ f$ peut être définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2+1}$.

  Mais $f \circ g$ ne peut pas être définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

  Si l'on se restreint à F, on a

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = x + 1$$

Opérations sur les applications

La composition satisfait les propriétés suivantes.

Proposition

Soient E, F, G, H des ensembles.

- *Pour tout $f \in \mathscr{F}(E,F)$, on a : $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.* (**Neutralité de l'identité**)

$$\begin{array}{rcccccc} f \circ \mathrm{Id}_E : & E & \xrightarrow{\mathrm{Id}_E} & E & \xrightarrow{f} & F \\ & x & \longmapsto & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

- *Pour tout $f \in \mathscr{F}(E,F)$, on a : $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.* (**Neutralité de l'identité**)

$$\begin{array}{rcccccc} \mathrm{Id}_F \circ f : & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{\mathrm{Id}_F} & F \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

- *La composition est* **associative** *: $\forall f \in \mathscr{F}(E,F)$, $\forall g \in \mathscr{F}(F,G)$, $\forall h \in \mathscr{F}(G,H)$, on a :*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Opérations sur les applications

Démonstration.

Montrons l'égalité

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Pour tout $x \in E$ on a

$$\begin{aligned}\Big(h \circ (g \circ f)\Big)(x) &= h\Big((g \circ f)(x)\Big) \\ &= h\Big(g\Big(f(x)\Big)\Big) \\ &= (h \circ g)\Big(f(x)\Big) \\ &= \Big((h \circ g) \circ f\Big)(x).\end{aligned}$$

$\square$

Opérations sur les applications

Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$. On peut aussi créer de nouvelles applications en ne modifiant que l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée de f.

Définition

Soit A une partie de E.

- *Soit $f : E \to F$ une application. On appelle* **restriction** *de f à A l'application notée*

$$f|_A : A \to F$$

  définie par

$$\forall x \in A, \quad f|_A(x) = f(x).$$

- *Soit $f : A \to F$ une application. On appelle* **prolongement** *de f à E toute application g de E dans F telle que :*

$$\forall x \in A, \quad f(x) = g(x).$$

  C'est-à-dire f est la restriction de g à E ($g|_A = f$).

Opérations sur les applications

Remarque :

- Restreindre/prolonger une application, c'est diminuer/augmenter la taille de son ensemble de définition.
- Parce que il existe en général beaucoup de prolongements d'une application donnée, on parle d'**un** prolongement et non **du** prolongement. Par exemple, si f est l'identite de $\mathbb{R}^+$, elle possède une infinité de prolongements à $\mathbb{R}$ tout entier, parmi lesquels
  - L'application **identité** de $\mathbb{R}$.
  - L'application **valeur absolue** de $\mathbb{R}$.
  - L'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}(|x| + x). \end{aligned}$$

    Notons que h est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-$ (i.e. $h(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$).

Injections-Surjections-Bijections.

Définition (Injection)

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **injective** *sur E ou que c'est une* **injection** *sur E si :*

$$\forall x,\ x' \in E, \quad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

Autrement dit f est injective si tout élément y de F possède **au plus un** *antécédent par f.*

Injections-Surjections-Bijections.

Exemples :

- La application identité sur un ensemble E, est injective.
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Alors toute application affine sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = ax + b$$

  est injective.
- L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3$$

  est injective.
- L'application exponentielle $f(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}$, est injective.

Injections-Surjections-Bijections.

Remarques :

- Une définition equivalente de l'injectivité est

$$\forall x,\ x' \in E, \quad x \neq x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(x').$$

  Notons que la proposition précédente est la contraposition de

$$\forall x,\ x' \in E, \quad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

- Le changement de l'ensemble de départ d'une application peut modifier la propriété d'être injective.
  Par exemple :
  - La fonction carré n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}_+$.
  - La restriction de $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est injective.

Injections-Surjections-Bijections.

Étudions certaines propriétés des fonctions injectives.

Proposition

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*

Démonstration.

- Soient $x, y \in E$. Supposons $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Nous voulons montrer que : $x = y$. Or

$$g(f(x)) = g(f(y)) \underbrace{\Longrightarrow}_{g \text{ injective}} f(x) = f(y) \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ injective}} x = y.$$

- Soient $x, y \in E$. Supposons $f(x) = f(y)$. Nous voulons montrer que : $x = y$. Or

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad g \circ f(x) = g \circ f(y) \underbrace{\Longrightarrow}_{g \circ f \text{ injective}} x = y.$$

$\square$

Injections-Surjections-Bijections.

Définition (Surjection)

Soit $f : E \to F$ *une application. On dit que* f *est une application* **surjective** *de* E *sur* F *ou que c'est une* **surjection** *de* E *sur* F *si :*

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Cela revient à dire que :

$$\mathrm{Im} f = F.$$

Autrement dit, f *est surjective de* E *sur* F *si et seulement si tout élément de* F *possède* **au moins un antécédent** *dans* E *par* f*.*

Exemple :

- L'application $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $n \mapsto |n|$. est surjective.
- L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. est surjective.

Injections-Surjections-Bijections.

Remarques :

- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on se donne un élément quelconque y de F et on montre qu'il a au moins un antécédent dans E, c'est-à-dire on montre qu'il existe $x \in E$ avec $f(x) = y$.
- Toute application est surjective de son ensemble de définition **sur son image**.
- Le changement de l'ensembles d'arrivée d'une application peut modifier la propriété d'être surjective.
  Par exemple :
  - L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ **est** surjective.
  - L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ **n'est pas** surjective.

Injections-Surjections-Bijections.

Étudions certaines propriétés des fonctions surjectives.

Proposition

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Démonstration.

- Montrons que $g \circ f$ est surjective. Soit $y \in G$. Nous voulons montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Or g est surjective, donc il exist $t \in F$ tel que $y = g(t)$. Mais f est aussi surjective, donc : $t = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Finalement, comme voulu :
$$y = g(t) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$
- Montrons que g est surjective. Soit $y \in G$. Nous voulons montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Or $g \circ f$ est surjective, donc : $y = g \circ f(t)$ pour un certain $t \in E$. Il suffit dès lors de poser :
$$x = f(t) \text{ pour avoir } y = g(x).$$

□

Injections-Surjections-Bijections.

Définition (Bijection)

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application **bijective** *(ou encore une* **bijection***) si*

$$\forall y \in F, \quad \exists ! x \in E, \quad y = f(x).$$

Autrement dit, f est bijective de E sur F si et seulement si tout élément de F possède **un et un seul antécédent** *dans E par f.*

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Alors

f *est* **bijective** $\iff$ f *est* **injective** *et* **surjective**

Remarque : Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on pourra raisonner en deux étapes en montrant l'injectivité et la surjectivité de f.

Injections-Surjections-Bijections.

Exemples :

- Soit $m \in \mathbb{R}^*$.Alors toute application affine de la forme $x \mapsto mx + n$ est bijective.
- L'application $x \mapsto x^3$ est bijective.
- On sait que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

n'est ni injective, ni surjective. Or si on restreint l'ensemble de départ de f à $\mathbb{R}_+$, et on modifie l'ensemble d'arrivée de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}_+$, on obtient que la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

est bijective. **Le changement de l'ensembles de départ et d'arrivée d'une application peut modifier la propriété d'être bijective.**

Injections-Surjections-Bijections.

Définition (Bijection Réciproque)

Soit $f : E \to F$ une application. On appelle **réciproque** *de f toute application $g : F \to E$ pour laquelle*

$$g \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_F.$$

Remarque : Les identités : $\forall x \in E,\ g \circ f(x) = x$ et $\forall y \in F,\ f \circ g(y) = y$ expriment l'idée que g défait le travail que f opère et vice versa.

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application. Alors

f est bijective de E sur F si et seulement si f possède une réciproque.

Une telle réciproque est alors **unique**, *appelée* **la réciproque de** *f et notée f^{-1}. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a*

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).$$

Injections-Surjections-Bijections.

Remarque : Si $f : E \to F$ est une application bijective. Alors son application réciproque f^{-1} est l'unique application de F dans E, qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f. \end{aligned}$$

Exemples :

- L'application Id_E est bijective de E sur E de réciproque elle-même. En effet
$$\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E.$$
- Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto ax + b$ est bijective.
Pour trouver sa réciproque, notons que
$$y = ax + b \iff \frac{y - b}{a} = x.$$
Par conséquent, la réciproque de $ax + b$ est $x \mapsto \frac{x-b}{a}$.

Injections-Surjections-Bijections.

Étudions certaines propriétés des fonctions bijectives.

Proposition

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- *Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et on a*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- *Si f est une bijection de E dans F, alors sa bijection réciproque f^{-1} est aussi bijective et :*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Injections-Surjections-Bijections.

En pratique, comment montrer concrètement qu'une application $f : E \to F$ est bijective ? Le tableau suivant, résume la marche à suivre.

Priorité	Ce qu'on fait	Ce qu'on obtient
1	Si on connaît spontanément une expression explicite de f^{-1}, on appelle g la fonction en question et on vérifie simplement que : $$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$	Bijectivité + Réciproque
2	Si on ne connaît pas spontanément f^{-1}, on peut essayer d'en trouver une expression explicite via l'équivalence : $$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$	Bijectivité + Réciproque
3	Si on ne se sent pas capable de trouver une expression explicite de f^{-1}, on montre en deux temps que f est à la fois injective et surjective.	Bijective

Injections-Surjections-Bijections.

C'est important de ne pas confondre l'application réciproque avec l'image réciproque

$$f^{-1} : P(E) \to P(E)$$

qui existe même lorsque f n'est pas bijective. Quand l'application est bijective, nous avons la suivant relation entre l'image réciproque de f et l'image directe de f^{-1}.

Proposition

Soit f une bijection de E sur F et B une partie de F. Alors

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$$

où

- $f^{-1}(B)$ *à gauche correspond à l'image* **réciproque** *de B par f.*
- $f^{-1}(B)$ *à droite correspond à l'image* **directe** *de B par f^-1.*