CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 3** **Algèbre I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Mercredi 25 Janvier 2023** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 (**(3 points)**)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$iz^2+(2+2i)z+\left(\frac{1}{2}+2i\right)=0.$$

Solution : (3 points = 2 +1) Nous avons

$$\Delta=(2+2i)^2-4i\left(\frac{1}{2}+2i\right)=4+8i-4-(-8+2i)=8+6i$$

Maintenant, pour trouver les racines carrées de $8+6i$ on calcule

$$z^2=8+6i \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& \sqrt{8^2+6^2}\\ x^2-y^2 &=& 8\\ 2xy &=& 6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 10\\ x^2-y^2 &=& 8\\ xy &=& 3\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 &=& 9\\ y^2 &=& 1\\ xy &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& 1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3\\ y &=& -1\end{array}\right.$$

(2 points).

D'où on conclut que les solutions de l'equation sont **(1 point)**

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{-(2+2i)+(3+i)}{2i}=\frac{1-i}{2i}=\frac{-1-i}{2},\\ \zeta_2 &= \frac{-(2+2i)-(3+i)}{2i}=\frac{-(5+3i)}{2i}=\frac{-3+5i}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2 (**(5,5 points)**)

Soit

$$u=-1+i \quad \text{et} \quad v=\sqrt{3}+i$$

1. Déterminer les modules de u et v
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. Résoudre l'équation $z^4 = u$.
   Donner le module et un argument pour chacune des racines quatrièmes de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de
$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

Solution : (5.5 points)

1. **(0.5 points)** $|u| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ et $|v| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2$.
2. Nous avons
$$u = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$
   Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$ **(0.5 points)**.
$$v = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$
   Donc un argument de v est $\frac{\pi}{6}$ **(0.5 points)**.
3. On cherche les solutions complexes de $z^4 = u$. En écrivant z sous forme trigonometrique $z = re^{i\theta}$ on obtient **(1 point)**
$$\begin{aligned} z^4 = u \Longleftrightarrow r^4e^{4i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} &\Longleftrightarrow r^4 = \sqrt{2} \ \text{ et } \ 4\theta = 3\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow r = 2^{\frac{1}{8}} \ \text{ et } \ \theta = \frac{3\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4},\ k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$
   Les racines quatrièmes de u sont donc **(1 point = 0.25+0.25+0.25+0.25)**
$$\zeta_0 = 2^{\frac{1}{8}}e^{\frac{3i\pi}{16}} \quad ; \quad \zeta_1 = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 2^{\frac{1}{8}}e^{\frac{11i\pi}{16}} \quad ; \quad \zeta_2 = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\pi\right)} = 2^{\frac{1}{8}}e^{\frac{19i\pi}{16}} \quad ; \quad \zeta_3 = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)} = 2^{\frac{1}{8}}e^{\frac{27i\pi}{16}}.$$
4. Nous avons
$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}.$$
   Donc $\left|\frac{u}{v}\right| = \sqrt{2}/2$ **(0.5 points)** et un argument de $\frac{u}{v} = \frac{7\pi}{12}$ **(0.5 points)**.
5. D'après la question précédente, nous avons
$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

De même

$$\frac{u}{v} = \frac{-1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(-1+i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}.$$

L'unicité de la forme algébrique de $\frac{u}{v}$ permet d'en déduire par identification : **(0.5+0.5 points)**

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \implies \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \implies \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Exercice 3(**(5,5 points)**)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, considérons

$$P_a(X) = X^5 + aX^4 - (a+1)X^3 - (a+1)X^2 + aX + 1.$$

1. Montrer que les nombres -1 et 1 sont racines du polynôme P_a.

   Solution : Nous avons **(0.5+0.5 points)**

$$\begin{aligned} P_a(1) &= 1 + a - (a+1) - (a+1) + a + 1 = 0, \\ P_a(-1) &= -1 + a + (a+1) - (a+1) - a + 1 = 0. \end{aligned}$$

2. Déterminer l'ordre de multiplicité des racines -1 et 1 en fonction du nombre réel a.

   Solution : (2.5 points) Nous avons

$$P'_a(X) = 5X^4 + 4aX^3 - 3(a+1)X^2 - 2(a+1)X + a.$$

   Ainsi **(0.5 points)**

$$\begin{aligned} P'_a(1) &= 5 + 4a - 3(a+1) - 2(a+1) + a = 0, \\ P'_a(-1) &= 5 - 4a - 3(a+1) + 2(a+1) + a = 4 - 4a \implies P'_a(-1) = 0 \iff a = 1. \end{aligned}$$

   On prend la dérivée seconde

$$P''_a(X) = 20X^3 + 12aX^2 - 6(a+1)X - 2(a+1).$$

   et on calcule **(0.5 points)**

$$P''_a(1) = 20 + 12a - 6(a+1) - 2(a+1) = 12 + 4a \implies P''_a(1) = 0 \iff a = -3.$$

   De plus, pour $a = 1$, nous avons

$$P''_1(-1) = -20 + 12 + 12 - 4 = 0.$$

   Finalement, **(0.5 points)**

$$P'''_a(X) = 60X^2 + 24aX - 6(a+1) \implies P'''_{-3}(1) = 0 \quad \text{et} \quad P'''_1(-1) \neq 0.$$

   Puisque le degré de P est 5 et -1 est une racine de P, on conclut $P^{(4)}_{-3}(1) \neq 0$. Par conséquent

- 1 est une racine de multiplicite 4 de P si et seulement si $a=-3$. Si $a\neq -3$, alors 1 est une racine double de P. **(0.5 point)**
- -1 est une racine de multiplicite 3 de P si et seulement si $a=1$. Si $a\neq 1$, alors -1 est une racine simple de P. **(0.5 point)**

3. Déterminer le quotient Q_a et le reste R_a de la division euclidienne du polynôme P_a par le polynôme $(X+1)(X-1)^2$.

   Solution : En effectuant la division euclidienne, on obtient **(1 point)**

   $$P_a(X) \;=\; (X+1)(X-1)^2\left(X^2+(a+1)X+1\right).$$

   Ainsi $R_a(X)=0$ et $Q_a(X)=X^2+(a+1)X+1$.

4. Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P_a sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$, pour $a=1$ et $a=-3$.

   Solution : D'après la question précédente, nous pouvons écrire **(0.5+0.5 points)**

   $$\begin{array}{rcl} P_1(X) & = & (X+1)(X-1)^2\left(X^2+2X+1\right) \;=\; (X+1)^3(X-1)^2. \\ P_{-3}(X) & = & (X+1)(X-1)^2\left(X^2-2X+1\right) \;=\; (X+1)(X-1)^4. \end{array}$$

   On peut conclure la même décomposition en utilisant l'ordre de multiplicité de 1 et -1 trouvé dans la question 2.

Exercice 4(**(5 points)**)

Soit $P=(X+1)^7-X^7-1$. Posons $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que $1+j=-j^2$

   Solution : (1 point) Nous avons

   $$1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=0 \quad\Longrightarrow\quad 1+j=-j^2.$$

2. Montrer que j est une racine multiple de P.
   Que'est ce que on peut dire de $\overline{j}$.

   Solution : Nous avons

   $$P(j) \;=\; (1+j)^7-j^7-1=(-j^2)^7-j-1=-(j^2+j+1)=0. \quad \textbf{(0.5 points)}$$

   De plus

   $$P'(j)=7(j+1)^6-7j^6=7(-j^2)^6-7=7-7=0. \quad \textbf{(0.5 points)}$$

   Ainsi, j est une racine au moins double de P.
   Finalement, puisque P est un polynome à coefficients réels, on conclut que $\overline{j}$ est aussi une racine au moins double de P **(0.5 points)**.

3. Trouver deux racines réelles évidentes de P.

   Solution : (0.5+0.5 points) Nous avons P(0)=1-0-1=0 et P(-1)=0+1-1=0.

4. Calculer le degré de P. En déduire la factorization de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

   Solution : Nous avons

$$(X+1)^7 - X^7 - 1 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} X^{7-i} - X^7 - 1 = \sum_{i=1}^{6} \binom{7}{i} X^{7-i}.$$

   Par conséquent, $\deg P = 6$ **(0.5 points)**. Ce qui nous permet de conclure l'égalité **(0.5+0.5 points)**

$$\begin{aligned} P(X) &= X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2 \\ &= X(X+1)(X^2+X+1)^2. \end{aligned}$$

Exercice 5(**(4 points)**)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on suppose que $\sin(5\theta) \neq 0$.

1. Montrer que

$$\left(1+e^{i\theta}X\right)^5 - \left(1+e^{-i\theta}X\right)^5 = 2i \sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k} \sin(k\theta) X^k$$

   Solution : **(1 point)** Nous avons

$$\begin{aligned} \left(1+e^{i\theta}X\right)^5 - \left(1+e^{-i\theta}X\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}X\right)^k - \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} \left(e^{-i\theta}X\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} \left(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}\right) X^k \\ &= \sum_{k=1}^{5} \binom{n}{k} \left(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}\right) X^k \\ &= \sum_{k=1}^{5} \binom{n}{k} 2i \cdot \sin(k\theta) X^k \ = \ 2i \sum_{k=1}^{5} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k. \end{aligned}$$

2. Résoudre $\dfrac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}} = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ en fonction de θ.

Solution : **(1.5 points)** Nous avons

$$\frac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}} = e^{\frac{2\pi i}{5}} \implies 1+ze^{i\theta} = e^{\frac{2\pi i}{5}} + ze^{-i\theta}e^{\frac{2\pi i}{5}}$$
$$\implies z\left(e^{i\theta} - e^{\frac{2\pi i}{5}-i\theta}\right) = e^{\frac{2\pi i}{5}} - 1$$
$$\implies z = \frac{e^{\frac{2\pi i}{5}} - 1}{\left(e^{i\theta} - e^{\frac{2\pi i}{5}-i\theta}\right)}$$
$$\implies z = \frac{2i\cdot e^{\frac{i\pi}{5}}\cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2i\cdot e^{\frac{i\pi}{5}}\cdot \sin\left(\theta-\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{5}\right)}.$$

3. En reproduisant la question précédente déduire toutes les racines du polynôme

$$P(X) = \sum_{k=1}^{5}\begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix}\sin(k\theta)X^k.$$

Solution : **(1.5 points)** Nous avons

$$P(z) = 0 \iff 0 = 2i\sum_{k=1}^{5}\begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix}\sin(k\theta)z^k = \left(1+e^{i\theta}z\right)^5 - \left(1+e^{-i\theta}z\right)^5$$
$$\iff \left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}}\right)^5 = 1$$
$$\iff \frac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}} = e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ k = 0,1,2,3,4.$$

La méthode utilisée dans la question précédente nous permet donc de conclure

$$P(z) = 0 \iff z = \frac{\sin\left(\frac{2ki\pi}{5}\right)}{\sin\left(\theta - \frac{2ki\pi}{5}\right)},\ k = 0,1,2,3,4.$$