CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 2** **Algèbre I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date* : Mercredi 27 novembre 2024 *Durée* : 1h00 *Nombre de pages* : 2

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◦◦◦

Exercice 1. [3 points]
On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x\mathscr{R}y \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists \ell \in \mathbb{N}^*, kx = \ell y$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. Décrire la classe d'équivalence de x.

Exercice 2. [5 points]
On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$ par : pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre défini par $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$ est-il total ?
3. On considère $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
   (a) L'ensemble D a-t-il des majorants pour l'ordre $\preceq$? En donner un si c'est le cas.
   (b) L'ensemble D a-t-il un plus grand élément pour l'ordre $\preceq$? Le donner si c'est le cas.
   (c) **Bonus :** L'ensemble D admet-il une borne supérieure ? Donner $\sup(D)$ si c'est le cas.

Exercice 3. [8 points]

1. On définit l'application f suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 + \dfrac{1}{x-2} \end{array}$$

(a) L'application f est-elle injective? surjective? bijective? Justifier vos réponses.

(b) Si f n'est pas bijective, déterminer l'ensemble F pour lequel $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to F$ devient bijective.

(c) Donner alors la réciproque de cette nouvelle application f.

2. On considère à présent l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \min(|x|, 2)$$

(a) Tracer l'allure de la courbe représentative de g.

(b) Déterminer les ensembles suivants :

$g(\mathbb{R})$ $\qquad$ $g(]-\infty, -3])$ $\qquad$ $g^{-1}(]-1, 2[)$

Exercice 4. [4 points]

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. **Bonus :** Que peut-on en déduire lorsque f et g sont bijectives? Donner de plus $(g \circ f)^{-1}$.