CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 2** **Algèbre I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date : 26/11/2024* *Durée :* **1h00** *Nombre de pages : 2*

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit une relation $\mathscr{R}$ en posant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$x \mathscr{R} y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ?

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide. Considérons l'ensemble

$$\mathscr{E} = \left\{(A, f) : A \subset E,\ A \neq \emptyset \text{ et } f : A \longrightarrow E\right\}.$$

Pour tout $(f, A) \in \mathscr{E}$, $(g, B) \in \mathscr{E}$ on pose

$$(f, A) \mathscr{R} (g, B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A \subset B \\ \forall x \in A,\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{E}$.
2. Est-ce un ordre total ? Justifier votre réponse.
3. **Bonus** : Soient (A, f) et (B, g) deux éléments de $\mathscr{E}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la partie $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée.

Exercice 3 (Les deux parties de cet exercice sont indépendantes)

1. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer l'implication suivante : Si f est surjective alors pour tout ensemble G et toutes applications $g, h : F \to G$,

$$g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$$

2. Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Démontrer pour tout $A \subset E$ et tout $B \subset F$, l'équivalence :

$$f(A) \cap B \neq \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

Exercice 4

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ l'application de E dans F définie par

$$f(x) = |1 + x| + |1 - x| - 2.$$

1. On suppose que $E = F = \mathbb{R}$.
   (a) Étant donné un réel x_0, comparer $f(x_0)$ et $f(-x_0)$.
   La fonction f est-elle injective ?
   (b) Donner les différentes expressions de f (en supprimant les valeurs absolues).
   Représenter graphiquement la fonction.
   (c) Déterminer $f(\mathbb{R})$.
   (d) La fonction f est-elle surjective ?
2. On suppose que $E = [1, +\infty[$ et $F = \mathbb{R}_+$.
   Donner l'expression de f et déterminer, si elle existe, l'application réciproque f^{-1} de F dans E.