



**Préing 1**  
**Devoir Surveillé 2**  
**Algèbre I**

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : Lundi 25 Novembre 2024

Durée : 1h00

Nombre de pages : 2

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.**

*Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

◇◇◇

**Exercice 1. (4 points) :**

Soit  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $\mathbb{Z}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \iff x + y \text{ est pair.}$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de 0. Décrire la classe d'équivalence de 1.
3. En déduire toutes les classes d'équivalence.

**Exercice 2. (4 points) :**

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on définit la relation  $\ll$  en posant

$$(x, y) \ll (x', y') \iff x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

1. Montrer que  $\ll$  est une relation d'ordre.
2. Est-ce une relation d'ordre total?
3. **Question Bonus** : Déterminer l'ensemble des majorants et des minorants du singleton  $\{(a, b)\}$  et représenter les dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3. (4 points) :**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \min(\sqrt{|x|}, 2).$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .
2. Déterminer les ensembles suivants en justifiant vos réponses :  
(a)  $f(\mathbb{R})$                       (b)  $f(]-\infty, -4] \cup [4, +\infty))$                       (c)  $f^{-1}([2, 9])$

**Exercice 4. (4 points) :**

Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'application définie par

$$f(x) = \frac{x+2}{4x-1}.$$

1.  $f$  est-elle injective? Justifier votre réponse.
2.  $f$  est-elle surjective? Justifier votre réponse.
3. Si  $f$  n'est pas bijective, déterminer l'ensemble  $F \subset \mathbb{R}$  pour lequel l'application  $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\} \rightarrow F$  est bijective.

**Question Bonus :** Donner l'application réciproque de  $f$ .

**Exercice 5. (4 points) :** Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

1. Montrer que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .  
Qu'est ce qu'on peut dire de l'inclusion réciproque? Justifier votre réponse.
2. Montrer que  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
3. **Question Bonus :** Montrer que  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ .  $\rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$   
Qu'est ce qu'on peut dire de l'inclusion réciproque? Justifier votre réponse.