



Préing 1
Devoir Surveillé 2
Algèbre I

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : Lundi 25 Novembre 2024

Durée : 1h00

Nombre de pages : 2

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1. (4 points) :

Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{Z} par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \iff x + y \text{ est pair.}$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de 0. Décrire la classe d'équivalence de 1.
3. En déduire toutes les classes d'équivalence.

Exercice 2. (4 points) :

Dans \mathbb{R}^2 , on définit la relation \ll en posant

$$(x, y) \ll (x', y') \iff x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

1. Montrer que \ll est une relation d'ordre.
2. Est-ce une relation d'ordre total?
3. **Question Bonus** : Déterminer l'ensemble des majorants et des minorants du singleton $\{(a, b)\}$ et représenter les dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 3. (4 points) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \min(\sqrt{|x|}, 2).$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
2. Déterminer les ensembles suivants en justifiant vos réponses :
(a) $f(\mathbb{R})$ (b) $f(\{-\infty, -4\} \cup \{4, +\infty\})$ (c) $f^{-1}(\{2, 9\})$

Exercice 4. (4 points) :

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\} \rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par

$$f(x) = \frac{x+2}{4x-1}.$$

1. f est-elle injective? Justifier votre réponse.
2. f est-elle surjective? Justifier votre réponse.
3. Si f n'est pas bijective, déterminer l'ensemble $F \subset \mathbb{R}$ pour lequel l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\} \rightarrow F$ est bijective.

Question Bonus : Donner l'application réciproque de f .

Exercice 5. (4 points) : Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Qu'est ce qu'on peut dire de l'inclusion réciproque? Justifier votre réponse.
2. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
3. **Question Bonus :** Montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. $\rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$
Qu'est ce qu'on peut dire de l'inclusion réciproque? Justifier votre réponse.