



Préing 1
Devoir Surveillé 2
Algèbre I

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : 28/11/2023

Durée : 1h00

Nombre de pages : 2

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1

Sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, on définit une relation \mathcal{R} en posant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$x \mathcal{R} y \iff x e^y = y e^x$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Quelle est la classe d'équivalence de 0?

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(A, f) : A \subset E, A \neq \emptyset \text{ et } f : A \rightarrow E\}.$$

Pour tout $(f, A) \in \mathcal{E}$, $(g, B) \in \mathcal{E}$ on pose

$$(f, A) \mathcal{R} (g, B) \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall x \in A, f(x) = g(x). \end{cases}$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur \mathcal{E} .
2. Est-ce un ordre total? Justifier votre réponse.
3. **Bonus** : Soient (A, f) et (B, g) deux éléments de \mathcal{E} . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la partie $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée.

Exercice 3 (Les deux parties de cet exercice sont indépendantes)

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer l'implication suivante : Si f est surjective alors pour tout ensemble G et toutes applications $g, h : F \rightarrow G$,

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

2. Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Démontrer pour tout $A \subset E$ et tout $B \subset F$, l'équivalence :

$$f(A) \cap B \neq \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

Exercice 4

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ l'application de E dans F définie par

$$f(x) = |1 + x| + |1 - x| - 2.$$

1. On suppose que $E = F = \mathbb{R}$.
 - (a) Étant donné un réel x_0 , comparer $f(x_0)$ et $f(-x_0)$.
La fonction f est-elle injective?
 - (b) Donner les différentes expressions de f (en supprimant les valeurs absolues).
Représenter graphiquement la fonction.
 - (c) Déterminer $f(\mathbb{R})$.
 - (d) La fonction f est-elle surjective?
2. On suppose que $E =]1, +\infty[$ et $F = \mathbb{R}_+$.
Donner l'expression de f et déterminer, si elle existe, l'application réciproque f^{-1} de F dans E .