



**Préing 1**  
**Devoir Surveillé 2**  
**Algèbre I**

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : 28/11/2023

Durée : 1h00

Nombre de pages : 2

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.**

*Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

◇◇◇

**Exercice 1**

Sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels, on définit une relation  $\mathcal{R}$  en posant, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  :

$$x \mathcal{R} y \iff x e^y = y e^x$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Quelle est la classe d'équivalence de 0?

**Exercice 2**

Soit  $E$  un ensemble non vide. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(A, f) : A \subset E, A \neq \emptyset \text{ et } f : A \rightarrow E\}.$$

Pour tout  $(f, A) \in \mathcal{E}$ ,  $(g, B) \in \mathcal{E}$  on pose

$$(f, A) \mathcal{R} (g, B) \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall x \in A, f(x) = g(x). \end{cases}$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{E}$ .
2. Est-ce un ordre total? Justifier votre réponse.
3. **Bonus** : Soient  $(A, f)$  et  $(B, g)$  deux éléments de  $\mathcal{E}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la partie  $\{(A, f), (B, g)\}$  soit majorée.

**Exercice 3** (Les deux parties de cet exercice sont indépendantes)

1. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Montrer l'implication suivante : Si  $f$  est surjective alors pour tout ensemble  $G$  et toutes applications  $g, h : F \rightarrow G$ ,

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

2. Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. Démontrer pour tout  $A \subset E$  et tout  $B \subset F$ , l'équivalence :

$$f(A) \cap B \neq \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

#### Exercice 4

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  l'application de  $E$  dans  $F$  définie par

$$f(x) = |1 + x| + |1 - x| - 2.$$

1. On suppose que  $E = F = \mathbb{R}$ .
  - (a) Étant donné un réel  $x_0$ , comparer  $f(x_0)$  et  $f(-x_0)$ .  
La fonction  $f$  est-elle injective?
  - (b) Donner les différentes expressions de  $f$  (en supprimant les valeurs absolues).  
Représenter graphiquement la fonction.
  - (c) Déterminer  $f(\mathbb{R})$ .
  - (d) La fonction  $f$  est-elle surjective?
2. On suppose que  $E = ]1, +\infty[$  et  $F = \mathbb{R}_+$ .  
Donner l'expression de  $f$  et déterminer, si elle existe, l'application réciproque  $f^{-1}$  de  $F$  dans  $E$ .