CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 2** **Algèbre**	
	Appareils électroniques et documents interdits	*Date :* **Jeudi 9 Décembre 2021** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 (*4 points*)

Écrire sous forme trigonométrique z_1, z_2, z_3 et z_4 avec :

a) $z_1 = \sin\dfrac{\pi}{6} + i\cos\dfrac{\pi}{6}$

b) $z_2 = 1 - e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0;2\pi]$

c) $z_3 = (-1+i)^5$

d) $z_4 = \dfrac{(\sqrt{2}-1)i}{1-i}$

Solution

a) $z_1 = \sin\dfrac{\pi}{6} + i\cos\dfrac{\pi}{6} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} + i\cos\dfrac{\pi}{3} = e^{i\dfrac{\pi}{3}}$

b) $z_2 = 1 - e^{i\theta} == e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}$

c) $z_3 = (-1+i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^r = 4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

d) $z_4 = \dfrac{(\sqrt{2}-1)i}{1-i} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

1 point pour chaque question

Exercice 2 (*6 points*)

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x^2, 2x) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a-b+1 \end{array}$$

1. Etude de f.
   (a) Etudier l'injectivité de f.
   (b) Etudier la surjectivité de f.
2. Etude de g
   (a) Etudier l'injectivité de g.
   (b) Etudier la surjectivité de g.
   (c) Déterminer $g([0,1] \times [0,1])$.
3. Etude des composées.

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, Déterminer $(g \circ f)(x)$.

(b) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, Déterminer $(f \circ g)((a, b))$.

(c) Etudier la surjectivité de $f \circ g$.

(d) Etudier l'injectivité de $g \circ f$.

4. (a) Représenter graphiquement $h = g \circ f$.

   (b) Déterminer $h([-1, 2])$

   (c) Déterminer $h^{-1}([-2, 4])$

Solution

0.5 points pour chaque réponse.

1. (a) Soit $(x, x') \in \mathbb{R}, f(x) = f(x') \Leftrightarrow (x^2, 2x) = (x'^2, 2x')$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x'^2 \\ x = x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \text{ ou } x = -x' \\ x = x' \end{cases} \Leftrightarrow x = x'$.
   Donc f est injective.

   (b) (0.5 points) Le couple(-1,0) n'admet pas d'antécédent car $\forall x \in \mathbb{R}$,, la première coordonnée de $f(x)$ est un carré donc est positive.

   Autre argument, on constante que si (a, b) est une image alors $a = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ donc (-1,-0) n'est pas une image.
   donc la fonction f n'est pas injective.

2. (a) On remarque que $g((0,0)) = 1 = g((1,1))$ donc g n'est pas injective.

   (b) Soit $y \in \mathbb{R}$, on résout pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2, g((a, b)y$. on observe que $g((y, -1)) = y$. On a donc obtenu un antécédent donc g est surjective.

   (c) On cherche à déterminer $g([0,1] \times [0,1])$, c'est à dire pour $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$, l'ensemble décrit par $a - b + 1$.
   on a $-1 \leq b \leq 0$ donc $01 \leq a - b + 1 \leq 2$ donc $a - b + 1 \in [0; 2]$ en sommant les inégalités.
   Réciproquement, soit $y \in [0; 2]$, si $y \geq 1$, on pose $b = 0$ et $a = y - 1$. On a alors $a - b + 1 = y$ avec $0 \leq a \leq 1$. Sinon, on pose $b = 1$ et $a = y$ et on a également $a - b + 1 = y$. Donc y admet bien un antécédent dans $[0; 1] \times [0; 1]$.
   On a bien $f([0; 1]) = [0; 2]$

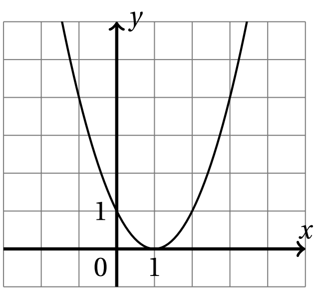
3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = x^2 - 2x + 1$

   (b) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f \circ g((a, b)) = ((a - b + 1)^2, 2(a - b + 1))$

   (c) f n'est pas surjective donc $f \circ g$ n'est pas surjective (contraposée de la propriété « Si $f \circ g$ est surjective alors f est surjective »).

   (d) f n'est pas injective donc $g \circ f$ n'est pas injective (contraposée de la propriété « Si $g \circ f$ est injective alors f est injective »).

4. (a) La représentation graphique est la suivante.



   (b) $f([-1; 2]) = [0; 4]$

   (c) $f^{-1}([-2; 4]) = [-1; 3]$

Exercice 3 (*4.5 points*)

Soit $P = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

Montrer que $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D.

1. f est Injective :

   Soit $z, z' \in P$, $f(z) = f(z')$ montrons que $z = z'$

$$\begin{aligned} f(z) = f(z') &\iff \frac{z-i}{z+i} = \frac{z'-i}{z'+i} \\ &\iff (z-i)(z'+i) = (z'-i)(z+i) \\ &\iff zz' + i(z-z') + 1 = z'z + i(z'-z) + 1 \\ &\iff z = z' \end{aligned}$$

   Donc f est injective.

   (1.5 points + 0.5 points pour la rigueur de la rédaction)

2. f est surjective :

   On utilise la définition.

   Soit $z \in D$.

   On cherche s'il existe $Z \in P$ tel que : $f(Z) = z$

$$\begin{aligned} f(Z) = z &\iff \frac{Z-i}{Z+i} = z \\ &\iff Z - i = Z \times z + i \times z \\ &\iff Z - Z \times z = i + i \times z \\ &\iff Z(1-z) = i(1+z) \\ &\iff Z = \frac{1+z}{1-z} \times i \end{aligned}$$

   (1 point)

   Il faut vérifier que $Z \in P$. Calculons $Im(Z) = Im\Big(\frac{1+z}{1-z} \times i\Big)$:

$$\begin{aligned} Im(Z) &= Im\Big(\frac{1+z}{1-z} \times i\Big) \\ &= Im\Big(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z^2|} \times i\Big) \\ &= Im\Big(\frac{(1-|z^2|) + 2iIm(z)}{|1-z^2|} \times i\Big) \\ &= Im\Big(\frac{-2Im(z)}{|1-z^2|} + i\frac{(1-|z^2|)}{|1-z^2|}\Big) \end{aligned}$$

   Comme $z \in D$ alors :

$$Im(Z) = \frac{(1-|z^2|)}{|1-z^2|} < 0.$$

   (1 points)

   Finalement $Z \in P$ qui est l'unique antécédent. Donc f est surjective.

   Comme f est injective et surjective, donc f est bijective.

   (0.5 points)

Exercice 4 (*4.5 points*)

On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathscr{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe de 0.
3. Déterminer la classe $\dfrac{\pi}{4}$.
4. (Question bonus) Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence de x et le nombre de réprésentant de cette classe dans $[0;2\pi]$

<u>**Solution**</u>

1. On a $x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x = \cos^2 y$.
   Donc $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence car elle hérite des propriétés de l'égalité.
   Réflexive 0.5, symétrique : 1 point, transitive : 1 point
2. On résout $x\mathscr{R}0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \cos 0$ ou $\cos x = \cos\pi$ donc $[x] = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
   (1 point)
3. On résout $\cos^2 x = \cos^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$
   Donc $[x] = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (1 point)
4. (bonus) $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x = \cos^2 y$
   $\Leftrightarrow \cos x = \cos y$ ou $\cos x = -\cos y$
   $\Leftrightarrow x = y + 2k\pi \in \mathbb{Z}$ ou $x = -y + 2k\pi \in \mathbb{Z} + \pi$
   $x = -y + 2k\pi \in 2$ ou $x = y + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   $[x] = \left\{y + k\pi; -y + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 5 (*3.5 points*)

Soit E un ensemble et $\mathscr{E} = \left\{(A, f) \mid A \subset E, A \neq \emptyset, \text{ et } f \text{ application de A dans E}\right\}$.
On munit $\mathscr{E}$ de la relation binaire $\preceq$ définie par :

$$(A, f) \preceq (B, g) \Longleftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ \forall x \in A, f(x) = g(x) \end{cases}$$

(c'est-à-dire que la fonction g, définie sur B, prolonge la fonction f, définie seulement sur A).

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre est-il total ? (1 point)
3. (question bonus) Soient (A, f) et (B, g) deux éléments de $\mathscr{E}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la partie $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée. Quelle est alors sa borne supérieure ?

<u>**Solution**</u>

---

1. (a) $\preceq$ est réflexive. En effet $A \subset A$ et $\forall x \in A, f(x) = f(x)$ (évidemment !)
   (b) $\preceq$ est antisymétriquee :
   Supposons $(A, f) \preceq (B, g)$ et $(B, g) \preceq (A, f)$ alors $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A = B$. Comme $\forall x \in A, f(x) = g(x)$ et f définie de A dans E et g définie de A dans E, on a $f = g$ donc $(A, f) = (B, g)$. Donc $\preceq$ est antisymétrique.
   (c) $\preceq$ est transitive :
   Supposons que $(A, f) \preceq (B, g)$ et $(B, g) \preceq (C, k)$.
   On a $A \subset B$; $\forall x \in A, f(x) = g(x)$, et $B \subset C ; \forall y \in B, g(y) = k(y)$. Donc on peut déduire $A \subset C$ et $\forall x \in A, f(x) = k(x)$.
   On a donc Alors $(A, f) \preceq (C, k)$. D'où $\preceq$ est transitive.
   (Réflexive 0.5 point, symétrique : 1 point, transitive : 1 point)

2. La relation $\preceq$ n'est pas une relation d'ordre total si le cardinal de A est strictement supérieur à 1 : Si on choisit deux éléments distincts de A, x et y alors $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ sont disjoints donc non inclus l'un dans l'autre. Donc (A, f) et (B, g) ne sont pas comparables.
   (1 point)
3. Soient (A, f) et (B, g) deux éléments de $\mathscr{E}$.
   Soit (C, k) un majorant de $\{(A, f), (B, g)\}$.
   On a, $\forall x \in A, f(x) = k(x)$ et $\forall x \in B, g(x) = k(x)$ donc $\forall x \in A \cap B, f(x) = k(x) = g(x)$.
   Donc $\forall x \in A \cap B, f(x) = g(x)$.
   Récproquement si $\forall x \in A \cap B, f(x) = g(x)$ (propriété P) alors définissons

$$\begin{array}{llll} k: & A \cup B & \to & E \\ & \text{si } x \in A, & k(x) & = & f(x) \\ & \text{si } x \in B, & k(x) & = & g(x) \end{array}$$

   Cette fonction est bien définie d'après la propriété (P) admise et $(A \cup B, k)$ majore $\{(A, f), (B, g)\}$