CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 1**	
	Matière : **Algèbre I** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date : Vendredi 25 octobre 2024* *Durée :* 1h *Nombre de pages :* 1

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1. (4 points)

1. Soient P et Q deux propositions. À l'aide d'une table de vérité, déterminer lesquelles des propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

$$\text{non}(P) \implies Q; \qquad P \text{ ou } Q; \qquad P \text{ ou } (P \text{ et } Q); \qquad (Q \text{ ou } P) \text{ et } P\ .$$

2. Donner la négation de la proposition suivante :

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geq N \implies u_n > M).$$

Exercice 2. (3 points) Soit la proposition suivante :

$$P(x,y): \quad (x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \implies x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1).$$

1. Vérifier que pour tous réels x et y,

$$x(y^2+y+1) - y(x^2+x+1) = (y-x)(yx-1)\ .$$

2. Montrer, par contraposition, que $P(x,y)$ est vraie.

Exercice 3. (4 points) On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

1. Vérifier que $A_{n+1} - 2A_n = 7 \cdot 3^{2n+2}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, A_n est divisible par 7.

Exercice 4. (5 points) Dans l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, on considère les trois sous-ensembles $A = \{0,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $C = \{2,4,6,7\}$.

Déterminer les ensembles suivants :

1. $B \setminus A$.
2. $A^c \cup (B \cap C)$.
3. $A \Delta B$.
4. $\mathcal{P}(A)$, où $\mathcal{P}(A)$ est l'ensemble des parties de A.

Exercice 5. (4 points) Soit E un ensemble, et A, B, C trois parties de E. Démontrer que :

1. $A = (A \cup B) \cap (A \cup B^c)$;
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.