P	Q	non(P)	non(P) $\Rightarrow$ Q	P ou Q	P et Q	P ou (P et Q)	(Q ou P) et P
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
			0.5	0.5		0.5	0.5

Donc on a :

$(\text{non}(P) \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ ou } Q)$ 0.5

$(P \text{ ou } (P \text{ et } Q)) \Longleftrightarrow ((Q \text{ ou } P) \text{ et } P)$ 0.5

$\boxed{\text{Ex.1.2}}$ $\underbrace{\exists M>0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}}_{0.5}, \underbrace{(n \geq N, u_n \leq M)}_{0.5}$

$\boxed{\text{Ex.2.1}}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \bullet\ x(y^2+y+1) - y(x^2+x+1) &= xy^2 + \cancel{xy} + x - yx^2 - \cancel{xy} - y \\ &= xy(y-x) + (x-y) \\ &= (y-x)(xy-1). \end{aligned}$$ 1

$\boxed{\text{Ex.2.2}}$ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

Supposons que $\overbrace{x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1)}^{A}$

$\underset{\boxed{\text{Ex.2.1}}}{\Longrightarrow}$ $(y-x)(xy-1) = 0 \Longrightarrow \underbrace{y = x \text{ ou } xy = 1}_{B}$ 1.5

Ccl : Par raisonnement direct on a démontrer que $A \Rightarrow B$
et donc par Contraposée on à $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ qui est $P(x,y)$. 0.5

Ex.3.1

$$A_{n+1} - 2A_n = 3^{2n+4} - \cancel{2^{n+2}} - 2 \cdot 3^{2n+2} + \cancel{2^{n+2}} \quad 0.5$$

$$= 3^2 \cdot 3^{2n+2} - 2 \cdot 3^{2n+2}$$

$$= (9-2)\, 3^{2n+2} = 7 \cdot 3^{2n+2} \quad 1$$

Ex.3.2

$\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " A_n est divisible par 7".

- Initialisation : Pour $n=0$ on a :

0.5 $\quad A_0 = 3^2 - 2 = 7$ est divisible par $7 \Rightarrow P_0$ est vrai

- Hérédité : Supposons que P_n est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. C-à-d, $\underbrace{\exists k \in \mathbb{N},\ A_n = 7k}_{0.5}$. On a

1 $\quad A_{n+1} \underset{\text{Ex.3.1}}{=} 2A_n + 7 \cdot 3^{2n+2} = 2 \times 7k + 7 \cdot 3^{2n+2} = 7\underbrace{(2k + 3^{2n+2})}_{k'}$

$\Rightarrow A_{n+1}$ est divisible par $7 \Rightarrow P_{n+1}$ est vrai

- Ccl : $\left.\begin{array}{l} P_0 \text{ est vrai} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n \Rightarrow P_{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vrai $\quad 0.5$

Ex.4

1) $B \setminus A = \{1, 2, 4, 6\}$ $\quad 1$

2) $A^c \cup (B \cap C) = \{1, 2, 4, 6, 7\} \cup \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 2, 4, 6, 7\}$ $\quad 1.5$

3) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$= \{0,1,2,3,4,5,6\} \setminus \{3,5\}$ 1

$= \{0,1,2,4,6\}$

4) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{5\}, \{0,3\}, \{0,5\}, \{3,5\}, A\}$ 1.5

$\boxed{\text{Ex.5}}$

1) $\underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup (B \cap B^c)}_{1} = \underbrace{A \cup \emptyset = A}_{1}$

2) $\underbrace{A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c)}_{1} = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$

$= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ 1