| | | |
|---|---|---|
| CY TECH | **Préing 1**<br>**Devoir Surveillé 1**<br>**Algèbre I** | |
| | L'usage de tout appareil électronique est interdit | *Date :* **Mardi 25 Octobre 2022**<br>*Durée :* **1h30**<br>*Nombre de pages :* **2** |

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.**

*Le sujet comporte 6 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

$\diamond\diamond\diamond$

**Exercice** [4 points]

Dans l'ensemble $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$, on considère les trois sous-ensembles

$$A = \{0;2;5\} \qquad B = \{1;2;3;4;5;6\} \qquad \text{et} \qquad C = \{4;5;7\}.$$

1. Déterminer les ensembles suivants : $C^c \cap (A \cup B)$; $A \Delta B$; $\mathscr{P}(C)$ ; $(A \cap B) \times C$.
2. Donner une partition de $(A \cap B) \times C$ contenant exactement 4 sous-ensembles notés $P_1, P_2, P_3$ et $P_4$.

**Solution :**

1. **0.75 points per ensemble**.
   - $C^c \cap (A \cup B) = \{0,1,2,3,6\}$.
   - $A \Delta B = \{0,1,3,4,6\}$.
   - $\mathscr{P}(C) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{4,5,7\}\}$.
   - $(A \cap B) \times C = \{2,5\} \times \{4,5,7\} = \{(2,4),(2,5),(2,7),(5,4),(5,5),(5,7)\}$.
2. **1 point**. On peut donner comme partition l'ensemble :

$$\Big\{\{(2,4)\},\{(2,5)\},\{(2,7),(5,4)\},\{(5,5),(5,7)\}\Big\}$$

**Exercice** [5 points]

1. Soient $P$, $Q$ et $R$ trois propositions. On suppose que $P$ est fausse, que $Q$ est vraie et que $R$ est vraie. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?
   (a) $\big(P \implies \text{non}(Q)\big)$ ou $\big[\text{non}(R \text{ et } Q)\big]$.
   (b) non $\big[\text{non}(P) \implies \big(Q \text{ et } \text{non}(R)\big)\big]$
2. Soient $P$, $Q$ et $R$ des propositions. Montrer que l'implication suivante est toujours vraie :

$$(P \implies Q) \quad \implies \quad [(P \text{ et } R) \implies (Q \text{ et } R)].$$

**Solution :**

1. (a) **1.5 point**.

$$\underbrace{\underbrace{P \implies \text{non}(Q)}_{\text{Faux} \implies \text{Faux} = \text{Vrai}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\text{non}(R \;\text{ et }\; Q)}_{\text{non(Vrai et Vrai)} = \text{Faux}}}_{\text{Vrai}} .$$

(b) **1.5 point**.

$$\underbrace{\text{non}\left[\underbrace{\underbrace{\text{non}(P)}_{\text{Vrai}} \implies \underbrace{\big(Q \;\text{ et }\; \text{non}(R)\big)}_{\text{Vrai et Faux} = \text{Faux}}}_{\text{Vrai} \implies \text{Faux} = \text{Faux}}\right]}_{\text{Vrai}}$$

2. **2 points**. Nous avons

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q$ et $R$ | $P$ et $R$ | $P \implies Q$ | $P$ et $R \implies Q$ et $R$ | $(P \implies Q) \implies ((P \text{ et } R) \implies (Q \text{ et } R))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

**Exercice** [4 points]

1. Notons $E$ l'ensemble des étudiants, $S$ l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant $x$, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour $j$. Écrire avec des symboles mathématiques la proposition :

   « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h »

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la négation de :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \implies |u_n - \ell| < \epsilon).$$

**Solution :**

1. **2 points**. L'expression : « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h », s'écrit

$$\forall x \in E, \exists j \in S,\ h_j(x) \leq 8.$$

2. **2 points**. La négation est donnée par

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n > N \;\text{ et }\; |u_n - \ell| \geq \epsilon).$$

**Exercice** [5 points]
Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété $P$ suivante pour $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ :

$$P: \text{ Si l'entier } \ (n^2-1) \ \text{ n'est pas divisible par 8, alors l'entier } \ n \ \text{ est pair.}$$

1. Définir la contraposé d'une implication $A \Longrightarrow B$, $A$ et $B$ deux propositions.
2. Ecrire la contraposée de la proposition $P$.
3. Démontrer qu'un entier impair $n$ s'ecrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.
4. Prouver la contraposée de $P$.
5. A-t-on demontré la propriété de l'énoncé?

**Solution :**

1. **0.75 points**. non $B \Longrightarrow$ non $A$
2. **0.75 points**. Si $n$ est impair alors l'entier $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.
3. **1.5 points.** Soit $n$ un impair, il existe donc $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k' + 1$. Maintenant, si $k'$ est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $k' = 2k$. Ainsi
$$n = 2k' + 1 = 4k + 1.$$
Si $k'$ est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $k' = 2k + 1$. Ainsi
$$n = 2k' + 1 = 4k + 3.$$
Par conséquent, tout entier impair $n$ s'ecrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.
4. **1.25 point**. Soit $n > 2$ un entier impair. D'apres la question précédente, il existe $r \in \{1, 3\}$ tel que
$$n = 4k + r.$$
Ainsi
$$n^2 - 1 \ = \ 16k^2 + 8kr + r^2 - 1 \ = \ \begin{cases} 16k^2 + 8k & \text{si } r = 1, \\ 16k^2 + 24k + 8 & \text{si } r = 3. \end{cases}$$
Dans le deux cas $n^2 - 1$ est divisible par 8.
5. **0.75 points**. Oui, car toute implication est équivalent à sa contraposée.

**Exercice** [5 points]

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $(4^n + 2)$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, avec $n$ supérieur ou égal à 8 il existe $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, tel que
$$n = 3a + 5b.$$

**Solution :**

1. **2 points**.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n): \quad 3 \text{ divise } 4^n + 2.$$

**Initialisation :0.5 points**. On a $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

**Hérédité :1.5 points**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$4^n + 2 \text{ est divisible par } 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 4^n + 2 = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons C'est-à-dire $4^{n+1} + 2$ est divisible par 3.

$$\exists k' \in \mathbb{Z}, \quad 4^{n+1} + 2 = 3k'$$

On a

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 2 &= 4 \cdot 4^n + 2 \\ &= 4(3k-2) + 2 \quad (\textbf{Hypothèse de Recurrence}) \\ &= 3 \cdot 4k - 8 + 2 \\ &= 3 \cdot 4k - 6 = 3\underbrace{(4k-2)}_{k'}. \end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut que pour tout entier naturel $n$ on a

$$3 \text{ divise } 4^n + 2$$

2. **2 points**.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 8,\ \mathscr{P}(n): \text{ il existe } a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n = 3a + 5b.$$

**Initialisation :0.5 points**. On a $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$. Donc $\mathscr{P}(8)$ est vraie.

**Hérédité :2.5 points**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, tel que

$$n = 3a + 5b.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons qu'il existe $a' \in \mathbb{N}$, $b' \in \mathbb{N}$, tel que

$$n + 1 = 3a' + 5b'.$$

On a

$$n + 1 = 3a + 5b + 1 \quad (\textbf{Hypothèse de Recurrence}).$$

Deux cas à étudier. Si $b \in \mathbb{N}^*$, alors $b - 1 \in \mathbb{N}$ et nous pouvons écrire

$$n + 1 = 3a + 5b + 3 \cdot 2 - 5 = 3(a+2) + 5(b-1).$$

Si $b = 0$, puisque $n + 1 > 8$, on conclut $a \geq 3$. Ainsi $a - 3 \in \mathbb{N}$ et nous pouvons écrire

$$n + 1 = 3a + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 3(a-3) + 5 \cdot 2.$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut que pour tout entier naturel $n \geq 8$, il existe $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, tel que

$$n = 3a + 5b.$$

**Exercice** [4 points]
Soit $E$ un ensemble, soit $A$, $B$ et $C$ trois parties de $E$.
Démontrer que :

1. $A = (A \cup B) \cap (A \cup B^c)$.
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
3. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

**Solution :**

1. **1 point**.

$$A = A \cup \emptyset = A \cup (B \cap B^c) = A \cup (B \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B^c)$$

   Une double inclusion facile permet aussi de conclure.

2. **1.5 points.**

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap A \cap B^c \cap C^c = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

3. **1.5 point.** Nous avons

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F) & \iff A \in \mathscr{P}(E) \quad \text{et} \quad A \in \mathscr{P}(F) \\ & \iff A \subset E \quad \text{et} \quad A \subset F \\ & \iff A \subset E \cap F \\ & \iff A \in \mathscr{P}(E \cap F). \end{aligned}$$

   D'où on conclut que $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F) = \mathscr{P}(E \cap F)$.