EISTI	**Cycle préparatoire 1ère année** **Devoir surveillé 1** *Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 12 octobre 2018**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4 points)

1. L'université donne une bourse à un étudiant si, et seulement si, il est bon et pauvre. Quels sont les étudiants qui ne reçoivent pas de bourse ?
2. Les deux affirmations "ceux qui parlent ne savent pas" et "ceux qui savent ne parlent pas" signifient-elles la même chose ? Justifier.
3. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente si

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon).$$

   Exprimer à l'aide de quantificateurs la proposition : "la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente".
4. Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble $\{\{a, \{\triangleright, \circ\}, \alpha\}, \star\}$?

Exercice 2. (8 points)
On définit le « ou exclusif », noté $\oplus$, par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Soit P, Q et R trois propositions.

1. (a) Montrer que $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q})$.
   (b) Sans utiliser de table de vérité, montrer que $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$.
2. (a) Simplifier les propositions suivantes :

$$P \oplus P \quad ; \quad P \oplus \text{Faux} \quad ; \quad P \oplus \text{Vrai} \quad ; \quad (P \oplus Q) \oplus Q$$

   (b) Sans utiliser de table de vérité, montrer que $(P \oplus Q) \oplus R \Leftrightarrow P \oplus (Q \oplus R)$.
3. Simplifier la proposition $(P \oplus Q) \oplus (P \wedge Q)$.

Exercice 3. (3 points)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = (-2)^n + 3^n$.

Exercice 4. (5 points)
Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer l'équivalence :
$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$
2. Montrer l'équivalence :
$$A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B).$$
3. Quelle relation existe-t-il entre les ensembles $(A \cup B) \times C$ et $(A \times C) \cup (B \times C)$? Justifier.