CY Cergy Paris Université **2023 – 2024**
CY Tech
PréIng 1

Travaux dirigés de
Mécanique du point

Ce document est disponible sur Teams.

Contact

Enseignant chargé du cours magistral (CERGY) : Fabien PIGUET
Bureau : Site du Parc - CAU 308
E-mail : fabien.piguet@cyu.fr

L'équipe pédagogique

CERGY	TD	Panayotis AKRIDAS-MOREL	panayotis.akridas-morel@cyu.fr
	TD	Abdelaziz BOUMIZ	abdelaziz.boumiz@cyu.fr
	TD	Émilie DUPONT	emilie.dupont@cyu.fr
	CM & TD	Fabien PIGUET	fabien.piguet@cyu.fr
PAU	CM & TD	Lucie DESPLAT	lucie.desplat@cyu.fr
		Paul FRUTON	paul.fruton@cyu.fr

Bibliographie

[1] A. DOUILLET, C. EVE-BEAUDOIN, N. LEBRUN, N. LIDGI-GUIGUI, and N. VERNIER, *Physique*. DUNOD, 2017.

[2] C. GARING and A. LHOPITAL, *Les 1001 questions de la Physique en Prépa - PCSI*. Ellipses, 2019.

[3] S. CARDINI, D. JURINE, and M.-N. SANZ, *Tout-en-un de Physique, option PCSI*, 5th ed., B. SALAMITO, Ed. DUNOD, 2019.

[4] B. LAMINE, *Méca, le livre qu'il vous faut pour (enfin) comprendre la Mécanique*. DUNOD, 2019.

[5] E. HECHT, *Physique*. DE BOECK Supérieur, 1999.

[6] J.-P. PÉREZ, *Mécanique - Fondements et applications*. DUNOD, 2001.

[7] T. NGUYEN, "TD de Mécanique du point - EISTI," 2019.

[8] P. AKRIDAS-MOREL and L. DESPLAT, "TD de Mécanique du point - CYU," 2021-2022.

[9] G. ROLLET, "TD de Panorama sur la Physique - CYU," 2022-2023.

[10] C. PINETTES, "TD de Phénomènes de transport - CYU," 2022-2023.

Table des matières

1 **Cinématique (suite)** **5**

2 **Forces et état d'équilibre** **7**

3 **Équations du mouvement** (2) **11**

4 **Équations du mouvement** (3) **13**

5 **Problèmes** **16**

6 **Équations du mouvement** (4) **18**

1 | Cinématique (suite)

Exercice 1 –
Dans un référentiel $\mathcal{R}$, on considère le repère cartésien $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et le repère polaire $(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

1. Exprimer les vecteurs de la base polaire en fonction des vecteurs de la base cartésienne.
2. Dans $\mathcal{R}$, calculer la dérivée temporelle des vecteurs de la base cartésienne.
3. Dans $\mathcal{R}$, calculer la dérivée temporelle des vecteurs de la base polaire.

Exercice 2 – Vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires
Dans cet exercice, on conserve les notations et le référentiel de l'exercice 1.

1. En mécanique on décrit le mouvement d'un système au cours du temps par rapport à un référentiel.
   Quelle grandeur joue le rôle de variable ?
   Quelles grandeurs physiques, fonctions de cette variable, permettent de décrire le mouvement du système ?
2. Rappeler les définitions des vecteurs vitesse instantanée $\vec{v}$ et accélération instantanée $\vec{a}$ en fonction du vecteur position $\vec{r}$ $(=\overrightarrow{OM})$.
3. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans les deux systèmes de coordonnées.
4. Exprimer $\vec{v}$ dans les deux systèmes de coordonnées et vérifier la cohérence dimensionnelle des différents termes.
5. Exprimer $\vec{a}$ dans les deux systèmes de coordonnées et vérifier la cohérence dimensionnelle des différents termes.

Exercice 3 – Étude d'un vinyle
En 1948, Columbia Records presse le premier disque microsillon en vinyle. Dans le référentiel lié au tourne-disque (dans lequel on se place), ce disque a un mouvement circulaire uniforme de vitesse de rotation $\dot{\theta}_0 = 33{,}3\,\text{tours}\cdot\text{min}^{-1}$. Il sera dénommé « 33 tours ». Le rayon d'un tel disque est $R = 30\,\text{cm}$.

1. En Physique, quel autre nom donne-t-on à la vitesse de rotation ?
   Donner sa dimension physique, et son unité SI.
2. Calculer la vitesse de rotation du disque en unités SI.
3. Calculer la période de rotation T du disque puis sa fréquence f.

4. La vitesse d'un point du disque dépend-elle de sa distance r par rapport au centre du disque ?
5. Calculer la vitesse d'un point situé sur le bord extérieur du disque, et d'un point situé à $r = 5\,\mathrm{cm}$ du centre du disque.

Exercice 4 – Face cachée de la Lune

Dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$, le centre de la Lune effectue des révolutions circulaires uniformes de rayon $R_{TL} = 3{,}84 \times 10^5\,\mathrm{km}$ et de période $T = 27$ jours, 7 heures, 43 minutes. Au cours de son mouvement, la Lune montre toujours la même face à la Terre. On considèrera que l'axe de rotation de la Lune sur elle-même est perpendiculaire à son plan de révolution autour de la Terre.

1. Définir le référentiel géocentrique.
2. Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du centre de la Lune dans $\mathcal{R}_g$. Calculer $\|\vec{v}\|$.
3. Quel est le mouvement d'un point de la surface de la Lune dans $\mathcal{R}_g$?
   Déterminer la vitesse angulaire de rotation de la Lune sur elle-même.
4. Dans le référentiel sélénocentrique $\mathcal{R}_s$ (analogue de $\mathcal{R}_g$ pour la Lune), quel est le mouvement du centre de la Terre ?

Exercice 5 – Accélération d'un objet à la surface de la Terre

En raison du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même, tous les points de sa surface ont un mouvement circulaire uniforme dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ (dans lequel on se place).

1. Déterminer l'accélération radiale (ici centripète) d'un tel point situé à la latitude λ. Calculer cette accélération à l'équateur, et pour $\lambda = 60°$.
2. Par quel facteur α faudrait-il multiplier la vitesse de rotation actuelle de la Terre pour que l'accélération centripète à l'équateur devienne égale à l'accélération de pesanteur terrestre actuelle $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$?
   Que vaudrait alors le poids d'un objet à l'équateur ?

2 | Forces et état d'équilibre

Données

Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

Intensité de la pesanteur terrestre : $g_T = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Charge élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Masses :
— Soleil $M_\mathrm{S} = 1{,}987 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
— Terre $M_\mathrm{T} = 5{,}975 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
— Lune $M_\mathrm{L} = 7{,}35 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
— proton $m_\mathrm{p} = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
— électron $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

Distances :
— Soleil–Terre $d_\mathrm{ST} = 1{,}495 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
— Terre–Lune $d_\mathrm{TL} = 3{,}844 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$

Généralités sur les forces

Exercice 1 – Force d'interaction gravitationnelle

1. Déterminer la dimension physique de la constante de gravitation universelle, puis ses unités à l'aide des unités fondamentales du Système International.
2. Comparer l'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur la Lune à celle du Soleil sur la Lune.
3. Deux sphères identiques, dont les centres sont distants de $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$, éprouvent une force de gravitation mutuelle de norme $F = 1{,}0\,\mathrm{N}$. Calculer la masse m de chacune des sphères.

Exercice 2 – Force d'interaction gravitationnelle et poids

Dans cet exercice, on approxime l'accélération *de pesanteur* à l'accélération *gravitationnelle.*

1. Que deviendrait le poids terrestre P_T d'un objet, si sa masse m et sa distance d au centre de la Terre étaient doublées ?

2. L'accélération de pesanteur sur Mars est $g_{\mathrm{M}} = 3{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Sachant que le diamètre de cette planète est $d_{\mathrm{M}} = 6{,}8 \times 10^3\,\mathrm{km}$, déterminez sa masse M_{M}.

Exercice 3 – Forces entre un proton et un électron

L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton et d'un électron.
Comparer les forces d'interaction gravitationnelle et électrostatique entre ces deux particules.

Exercice 4 – Force de rappel élastique

1. Rappeler l'expression de la force de rappel élastique exercée par un ressort sur un objet fixé à son extrémité et expliquer les différents termes.
2. Pour chacun des cas 1 à 5 de la figure 2.1, exprimer la force de rappel élastique $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le point M en fonction de : la raideur k du ressort, sa longueur à vide l_0, la position du point M, la position du point H et d'un vecteur unitaire.
3. Pour le cas 6, exprimer les forces exercées par les deux ressorts sur chacun des points M_1 et M_2. Le ressort de gauche est caractérisé par (k, l_0) et celui de droite par (k', l_0').

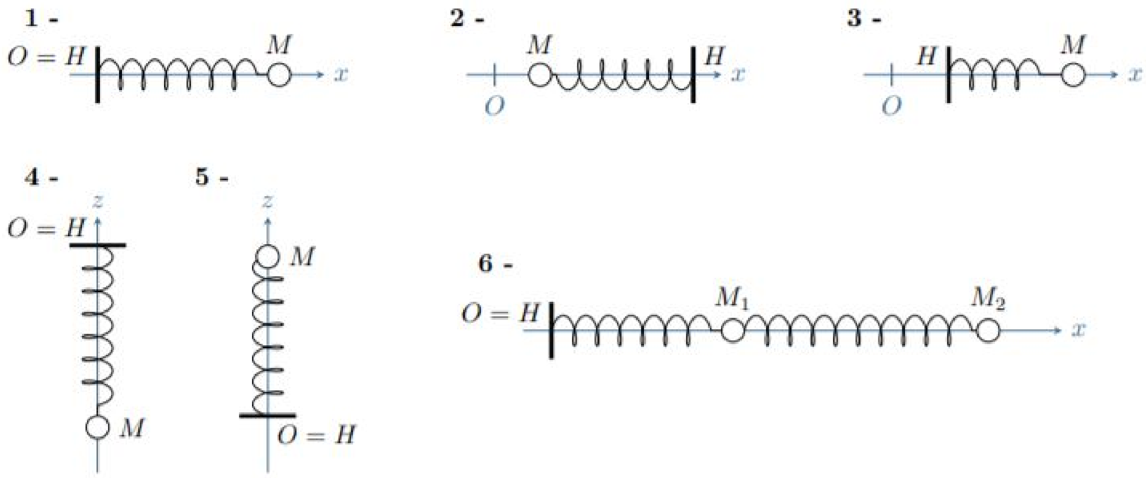


Figure 2.1 Exercice 4

État d'équilibre

Exercice 5 – Questions préliminaires

Définir l'état d'équilibre d'un point matériel en termes de forces exercées sur ce point. Quel est alors le mouvement du point par rapport à un référentiel galiléen ?

Exercice 6 –

Dans le champ de pesanteur terrestre, un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 est en position verticale. On pose sur celui-ci un bloc de masse m. À l'équilibre, exprimer la variation de la longueur du ressort en fonction de m, k et g.

Exercice 7 –

Une personne de masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ est allongée dans un hamac supposé sans masse et accroché entre deux arbres comme représenté sur la figure 2.2. On étudie le système $\{\text{homme} + \text{hamac}\}$.

1. Identifier les forces extérieures appliquées au système.
2. Donner la condition pour que le système soit à l'équilibre et déterminer alors la norme des différentes forces.

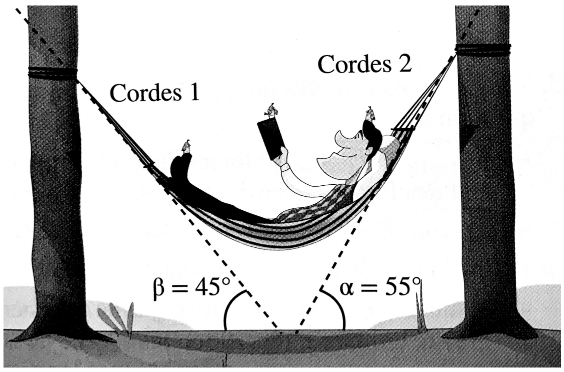


Figure 2.2 Exercice 7. Figure issue de [1]

Exercice 8 –

Dans le champ de pesanteur terrestre, un bloc de masse m est posé sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale.

1. En l'absence de frottements, quelles forces s'appliquent sur le bloc ? Faire un schéma et un bilan détaillé.
2. On suppose à présent qu'il existe des frottements entre le bloc et la surface. Montrer que le bloc reste à l'équilibre tant que $\tan\alpha \leq \mu$, où μ est un coefficient de frottement solide entre le bloc et la surface.

Exercice 9 – Poussée d'Archimède

Dans cet exercice, on néglige la poussée d'Archimède due à l'air comparée à celle due à un liquide.

1. La piscine de Conflans-Sainte-Honorine est dotée d'une fosse de plongée cylindrique de diamètre $d = 7\,\mathrm{m}$, remplie initialement d'une hauteur $h = 20\,\mathrm{m}$ d'eau. Un plongeur de masse $m = 85\,\mathrm{kg}$ entre dans l'eau et s'y trouve à l'équilibre. Calculer la variation Δh de la hauteur d'eau dans la fosse.

2. On considère un iceberg de volume V et de masse volumique $\rho_g = 0{,}917\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$ flottant sur la mer de masse volumique $\rho_s = 1{,}025\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

2.a) Déterminer le volume immergé V_i de l'iceberg en fonction de V, ρ_g et ρ_s.

2.b) En supposant l'iceberg de section horizontale S uniforme, calculer sa hauteur immergée h_i pour une hauteur émergée $h_e = 30\,\mathrm{m}$.

3. Initialement, un glaçon flotte dans un verre d'eau rempli à ras bord. Puis le glaçon fond complètement.

3.a) Le verre déborde-t-il ?

3.b) Même question en ne négligeant pas la poussée d'Archimède due à l'air.

3.c) Même question en négligeant la poussée d'Archimède due à l'air, et en remplaçant l'eau liquide par un liquide de masse volumique plus faible.

3 | Équations du mouvement hors-éq/éq : $\overrightarrow{p}$

Exercice 1 – Un classique : le tir parabolique

Dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$, un projectile ponctuel P de masse m est lancé du point O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle $\alpha_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec l'horizontale (Ox). On note (Oz) la verticale ascendante. On se place dans le référentiel terrestre approximé galiléen, lié à $(O; \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_z)$. On néglige les forces de frottements dans l'air.

1. Déterminer les équations horaires du mouvement, puis l'équation de la trajectoire de P.
2. Exprimer la hauteur maximale h atteinte par le projectile en fonction de $g = \|\overrightarrow{g}\|$, $v_0 = \|\overrightarrow{v_0}\|$ et α_0. Que vaut l'accélération du projectile en ce point ?
3. À quelle distance d du point de départ atterrit le projectile ?
4. Pour v_0 fixée, montrer qu'il existe un autre angle possible α_0' pour atteindre la même distance d. Préciser cet angle.
5. Déterminer $\alpha_0^\star$ tel que d soit maximale.

Exercice 2 – Vitesse de sédimentation

Pour mettre en évidence un syndrome inflammatoire (rhumatisme, infection, ...), un examen biologique courant du sang consiste à mesurer la vitesse de sédimentation des globules rouges dans le plasma (partie liquide du sang) en plaçant le sang dans un tube vertical. L'objectif de l'exercice est de déterminer la vitesse de sédimentation d'un patient sain.

Le globule est assimilé à une sphère de rayon $R_{\mathrm{G}} = 3{,}5\,\mathrm{\mu m}$. Il est soumis à une force de frottement visqueux $\overrightarrow{F}$ de la part du plasma telle que :
$\|\overrightarrow{F}\| = 6\pi\eta R_{\mathrm{G}}\|\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}}\|$ où $\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}}$ est la vitesse du globule.

Données

— viscosité du plasma : $\eta = 1{,}6 \times 10^{-3}$ SI ;
— masse volumique du globule rouge : $\rho_{\mathrm{G}} = 1{,}3\,\mathrm{g/cm^3}$;
— masse volumique du plasma : $\rho_{\mathrm{P}} = 1{,}03\,\mathrm{g/cm^3}$;
— intensité de pesanteur terrestre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. *Force de frottement fluide*

   1.a) Déterminer la dimension physique puis les unités SI de la viscosité η.

1.b) Quelle hypothèse concernant la force de frottement a été faite ?

2. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur le globule.

3. Après avoir rappelé le référentiel utilisé, déterminer l'équation du mouvement du globule (pour la variable v_{G}).

4. *Résolution de l'équation du mouvement*

4.a) À partir d'une analyse dimensionnelle des différents termes de l'équation, montrer que l'on peut faire apparaître un temps caractéristique τ et une vitesse caractéristique v^*.

4.b) Réécrire l'équation du mouvement à l'aide de ces deux grandeurs caractéristiques puis identifier mathématiquement cette équation.

4.c) Résoudre l'équation homogène ou équation sans second membre. La solution obtenue est appelée solution *générale*.

4.d) Déterminer une solution *particulière* de l'équation du mouvement.

4.e) Étant donné la situation, quelle condition initiale sur la vitesse du globule est-il raisonnable de choisir ?

4.f) Déterminer la solution *complète* de l'équation du mouvement.

5. Tracer qualitativement le graphe de la vitesse en fonction du temps.

6. Décrire le mouvement du globule dans le référentiel considéré.

7. Calculer la vitesse de sédimentation du globule (c'est-à-dire lorsque l'état d'équilibre est atteint) en $\mathrm{mm \cdot h^{-1}}$. L'hypothèse sur les forces de frottement est-elle légitime ?

8. Donner un ordre de grandeur de la durée Δt nécessaire pour atteindre l'équilibre.

Exercice 3 – Mouvements circulaires d'une bille attachée

1. Une bille assimilée à un point matériel M de masse $m = 20\,\mathrm{g}$ est reliée à un axe de rotation vertical Δ par deux fils de même longueur $\ell = 50\,\mathrm{cm}$. Les points d'attache $\mathrm{O_1}$ et $\mathrm{O_2}$ sur cet axe vertical sont distants d'une longueur $D = 60\,\mathrm{cm}$. Dans le référentiel terrestre approximé galiléen et lié à Δ, la bille tourne à vitesse angulaire constante $\omega = 16\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

1.a) En supposant que les fils restent tendus, déterminer les forces de tension $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ de chacun des deux fils en fonction de D, ℓ, m, ω et g.

1.b) À quelle condition sur ω les fils restent-ils tendus ?

2. La bille est maintenant reliée à l'axe Δ par un ressort de raideur $k = 30\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Elle décrit toujours une trajectoire circulaire dans un plan perpendiculaire à Δ à vitesse angulaire ω constante. Le ressort a une longueur ℓ et fait un angle α avec l'axe Δ.

2.a) Exprimer la force $\vec{F}$ exercée par le ressort dans la base de coordonnées cylindriques.

2.b) Établir la relation entre ω, α, g et ℓ.

2.c) En déduire ℓ, $\|\vec{F}\|$ et α.

4 | Équations du mouvement hors-éq/éq : E

Exercice 1 – Locomotive

Dans le référentiel d'étude, on considère le mouvement uni-dimensionnel suivant :
au cours d'une première phase, une locomotive exerce une force de traction constante $\vec{F}_1$ de norme $400\,\mathrm{kN}$ sur un wagon qu'elle tire sur une distance $d_1 = 500\,\mathrm{m}$. Dans une seconde phase, la locomotive exerce une force constante $\vec{F}_2$ de norme $100\,\mathrm{kN}$ dans le sens opposé au mouvement afin d'arrêter le wagon au bout d'une distance $d_2 = 1\,\mathrm{km}$.

1. Calculer le travail de $\vec{F}_1$ durant la phase 1.
   S'agit-il d'un travail moteur ou résistant ?
2. Mêmes questions pour $\vec{F}_2$ durant la phase 2.

Exercice 2 – Dépanneuse

Dans le référentiel d'étude, on considère la situation suivante :
une dépanneuse remorque une voiture sur une pente faisant un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale. La dépanneuse est en mouvement rectiligne uniforme et la force $\vec{F}$ exercée par le câble est constante, de norme $1600\,\mathrm{N}$. Le câble forme un angle $\beta = 30°$ avec la chaussée. Quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si elle la remorque sur une distance $d = 0{,}50\,\mathrm{km}$?

Exercice 3 – Ressort

Dans le référentiel d'étude, on considère la situation suivante (fig. 4.1) :
un objet est attaché à un ressort de raideur k en apesanteur. À l'équilibre, l'objet est à l'altitude $z_0 = 0{,}3\,\mathrm{m}$ (fig. 4.1(a)). À l'instant initial, l'objet est amené à $z = 0\,\mathrm{m}$ puis relâché. La force exercée par le ressort en fonction de z est représentée sur la fig. 4.1(b).

1. À partir du graphique, donner les caractéristiques de cette force. Sont-elles cohérentes avec l'expression de la force de rappel d'un ressort ?
2. Quel est le travail de la force exercée par le ressort lorsque l'objet se déplace :
   2.a) de $z = 0\,\mathrm{m}$ à $z = 0{,}3\,\mathrm{m}$?
   2.b) de $z = 0{,}3\,\mathrm{m}$ à $z = 0{,}6\,\mathrm{m}$?
   2.c) de $z = 0\,\mathrm{m}$ à $z = 0{,}6\,\mathrm{m}$?
3. Retrouver ce dernier résultat sans aucun calcul.

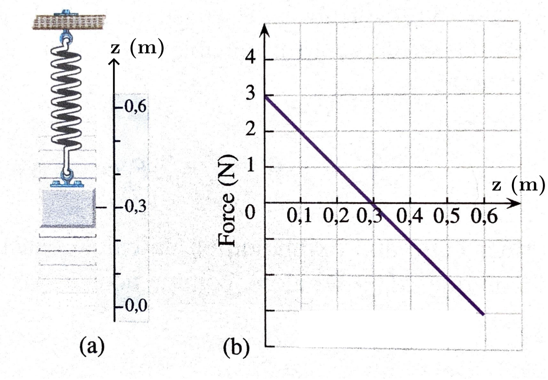


Figure 4.1 Exercice 3

Exercice 4 – Ascenseur

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
l'ascenseur express de la tour Sears à Chicago a une vitesse moyenne $v = 600\,\mathrm{m/min}$.
Quelle est la puissance moyenne de son moteur pour monter une masse $m = 1\,\mathrm{tonne}$ (départ et arrivée au repos) ?

Exercice 5 –

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, on considère la situation suivante :
un corps ponctuel de masse $m = 1{,}50\,\mathrm{kg}$ se déplace sur une droite sous l'influence d'une seule force $\overrightarrow{F}$. Sa position au cours du temps est donnée par :
$x(t) = \alpha t^2$ avec $\alpha = 5{,}00\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

1. Déterminer $\overrightarrow{F}$.
2. Calculer de deux manières différentes le travail de cette force pendant $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$ suivant l'instant initial pris comme origine du temps.
3. Commenter le signe de ce travail en fonction du signe de α.

Exercice 6 – Cycliste

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
une cycliste descend une pente en roue libre, passant d'une altitude $h_1 = 1200\,\mathrm{m}$ où sa vitesse est $v_1 = 50\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ à une altitude $h_2 = 950\,\mathrm{m}$ où sa vitesse est $v_2 = 60\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.
Le système {cycliste + bicyclette} a une masse $m = 55\,\mathrm{kg}$.
Déterminer le travail des forces de frottement sur ce déplacement.

Exercice 7 – Luge

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
un enfant fait de la luge. Le système {enfant + luge} a une masse $m = 40\,\mathrm{kg}$. L'enfant part avec une vitesse nulle du sommet d'une pente de longueur $d = 100\,\mathrm{m}$ inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale.

1. En négligeant les frottements, quelle est la vitesse finale $v_f = \|\vec{v}_f\|$ de l'enfant en bas de la pente ?
2. Si $v_f = 60\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, déterminer le coefficient de frottement μ de la neige sur la luge.

Exercice 8 – Profil d'énergie potentielle

On considère une molécule diatomique polaire formée de deux atomes M_1 et M_2 ponctuels distants de r, de charge partielle $q_1 = +\delta e$ et $q_2 = -\delta e$. L'énergie potentielle $U(r)$ d'interaction entre les atomes est modélisée par :

$$U(r) = -\frac{\delta^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{A}{r^9} \quad \text{où } A \text{ est une constante positive.}$$

On étudie le mouvement de M_2 dans le référentiel lié à M_1.

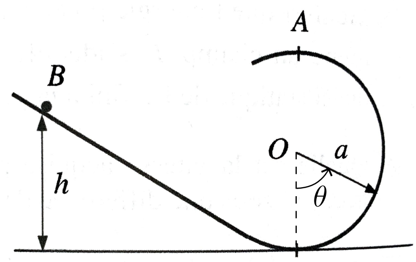
1. Pour chaque terme de $U(r)$, indiquer s'il correspond à une interaction attractive ou répulsive et en donner le sens physique.
2. Tracer l'allure de $U(r)$ et y placer le rayon d'équilibre r_{eq} que l'on déterminera. Cet équilibre est-il stable ?
3. On pose $r' = r - r_{\mathrm{eq}}$.
   Au voisinage de la position d'équilibre, effectuer une approximation à l'ordre 2 de $U(r)$ et en déduire l'expression de la force $\vec{F}$ subie par M_2 dans cette région.
   De quel type de force s'agit-il ? Exprimer ses paramètres en fonction des données du problème.

   N.B. : cette approximation, dite harmonique, est fondamentale en Physique ; elle permet de décrire le comportement de tout système physique soumis à une force conservative au voisinage d'un équilibre stable.

5 | Problèmes : $\vec{p}$ et E

Exercice 1 – Looping

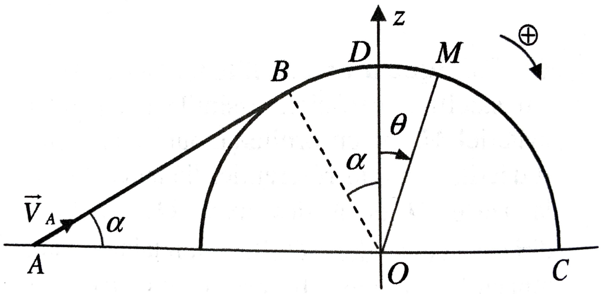
Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
une bille ponctuelle de masse m est lâchée depuis le point B avec une vitesse initiale nulle. Elle glisse sans frottement sur le plan incliné puis dans le looping de rayon a. On désigne par $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'intensité du champ de pesanteur.



1. Par un raisonnement énergétique, exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la bille en un point quelconque du looping en fonction de θ.
2. Écrire le PFD pour la bille dans le looping. En déduire l'expression de la réaction normale $\vec{N} = -N\vec{u}_r$ en fonction de θ et h.
3. Montrer qu'à h fixée, la réaction est minimale en A.
4. En déduire une condition sur h pour que la bille effectue un looping complet.
5. Dans le cas où h est insuffisante, donner l'expression de l'angle de décrochage θ_d ainsi que l'altitude de décrochage z_d.

Exercice 2 – *(supp.)* Bosse

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
un palet de masse $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ assimilé à un point matériel est lancé sur une piste composée d'une portion rectiligne AB inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale et d'une portion circulaire BC de rayon $R = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Initialement lancé depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$, le palet glisse sans frottement sur la piste. On désigne par $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'intensité du champ de pesanteur.



1. Déterminer par un raisonnement énergétique la vitesse $v_B = \|\vec{v}_B\|$ en fonction de v_A, g, R et α.
2. En déduire, en fonction de g, R et α, la valeur minimale v_0 de v_A telle que B soit effectivement atteint par le palet.
3. On suppose cette dernière condition vérifiée. Calculer la durée τ du parcours de la portion AB en fonction de v_A, v_B, g et α.
4. Déterminer l'expression de la réaction normale $N = \|\vec{N}\|$ du support lors de la phase du mouvement sur l'arc BC en fonction de m, g, R, θ et $\dot{\theta}$ puis en fonction de m, g, R, θ et v.
5. Montrer que si le palet décolle entre B et le sommet D, ce décollage a lieu en B. Déterminer, en fonction de R, g et α, la valeur maximale v_ℓ de v_A telle qu'il n'y ait pas de décollage avant le sommet.
6. Déterminer la valeur minimale $v_{\ell'}$ de v_A telle que le sommet soit atteint.
7. Exprimer ainsi l'intervalle de valeurs de v_A, puis la condition sur l'angle α, pour que le palet franchisse le sommet sans décoller.
8. Montrer que la valeur θ_d de θ pour laquelle le palet quitte la piste est donnée par $\cos\theta_d = \frac{v_A^2}{3gR}$.

Exercice 3 – Flipper

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
le lanceur d'un flipper est constitué d'un ressort de raideur $k = 360\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 20\,\mathrm{cm}$. Ce ressort est fixé à l'extrémité d'une gouttière dans laquelle coulissent sans frottement le ressort et la bille du flipper. La gouttière de lancement est inclinée d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. On désigne par $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'intensité du champ de pesanteur.

1. Le joueur comprime le ressort de $|\ell - \ell_0| = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Déterminer la vitesse avec laquelle la bille de masse $m = 100\,\mathrm{g}$ est propulsée. On suppose que la bille est propulsée quand le ressort reprend sa longueur à vide.
2. La gouttière a une longueur $L = 1{,}2\,\mathrm{m}$ à partir du point d'attache du ressort. Déterminer la vitesse de la bille à la sortie de la gouttière.
3. Quelle doit être la compression minimale du ressort pour que la bille entre dans le jeu (c'est-à-dire sorte de la gouttière) ?

6 | Équations du mouvement hors-éq/éq : $\vec{L}$

Exercice 1 –

1. Que représente le A de la notation $\vec{L}_A$ (moment cinétique) et $\vec{M}_A$ (moment d'une force) ?
2. Dans le référentiel d'étude, un point matériel M est en mouvement circulaire de centre O et de rayon R dans le plan (Oxy).
   - **2.a)** Dans quel sens (direct ou indirect) tourne M si la composante selon z de son moment cinétique par rapport à O est positive ?
   - **2.b)** Comment évolue sa vitesse angulaire si cette composante croît ?

Exercice 2 –

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
un point matériel M de masse m est attaché à un fil idéal de longueur ℓ_0, dont l'autre l'extrémité est fixe en O. Dans le plan horizontal (Oxy), M décrit un mouvement circulaire uniforme à vitesse v_0.

1. Déterminer le moment cinétique de M par rapport à O.
2. On réduit brutalement la longueur du fil à ℓ_1.
   Exprimer la nouvelle vitesse v_1 de M.
3. Comparer l'énergie cinétique de M avant et après la réduction de la longueur du fil. À quoi correspond cette variation ?

Exercice 3 – Pendule simple

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
un point matériel M de masse m, attaché à un fil idéal de longueur ℓ dont l'autre l'extrémité est fixe en O, oscille dans le plan vertical. On note θ l'angle d'inclinaison du fil par rapport à la verticale à l'instant t. On ne considère aucune autre force que la pesanteur.

Établir l'équation du mouvement de M à l'aide :

1. du théorème du moment cinétique
2. *(supp.)* du théorème de l'énergie cinétique
3. *(supp.)* du théorème de la quantité de mouvement (= PFD).

Exercice 4 –

On étudie le mouvement d'une comète (C) uniquement soumise à l'interaction gravitationnelle du Soleil (S).

1. Justifier que le référentiel $\mathcal{R}_I$ lié au centre d'inertie I du système $\{C + S\}$, et en translation par rapport à un référentiel galiléen, soit lui-même un référentiel galiléen.
2. Justifier que l'on puisse approximer $\mathcal{R}_I$ avec le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_S$. Dans ce qui suit, on se place dans ce référentiel.

À l'instant t_0, la comète passe au point de sa trajectoire le plus proche du Soleil, noté P_0. Sa distance au Soleil vaut alors r_0 et la norme de sa vitesse v_0.

3. Justifier que la vitesse radiale de la comète soit nulle en P_0.
4. Faire un schéma approximatif de la trajectoire de la comète. Placer en particulier P_0 et $\vec{v}_0$.
5. Exprimer le moment cinétique de la comète par rapport à S en P_0.
6. Montrer que le moment cinétique de la comète est une constante du mouvement.

Exercice 5 – Bille dans un cône

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante : une bille ponctuelle de masse m glisse sans frottement à l'intérieur d'un cône de sommet O, de demi-angle α et d'axe $(O, \vec{u}_z)$ vertical ascendant. On utilise les coordonnées cylindriques dont l'origine est prise en O.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Exprimer l'altitude z de la bille en fonction de r et α.
3. **3.a**) Montrer que l'énergie mécanique E_m de la bille est conservée.
   3.b) L'exprimer en fonction de r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et des paramètres de la situation.
4. **4.a**) Montrer que la composante selon z du moment cinétique de la bille est conservée.
   4.b) L'exprimer en fonction de r, $\dot{\theta}$ et des paramètres de la situation.
5. **5.a**) En déduire E_m en fonction de r, $\dot{r}$, L_z et des paramètres de la situation.
   5.b) Exprimer E_m comme la somme d'une énergie cinétique effective et d'une énergie potentielle effective.
   5.c) Tracer l'allure de l'énergie potentielle effective et décrire le mouvement de la bille.