CY Cergy Paris Université **2023 – 2024**
CY Tech
PréIng 2

Travaux dirigés d'Électromagnétisme

Ce document est disponible en ligne

Table des matières

Plan du cours

Électrostatique

Force entre deux charges

Champ électrique

Théorème de superposition et symétries

Théorème de Gauss

Potentiel électrostatique

Conducteurs en équilibre électrostatique

Magnétostatique

Champ magnétique - Force de Lorentz

Loi de Biot et Savart - Théorème de superposition et symétries

Induction électromagnétisme

Électrodynamique des régimes quasi stationnaires

Intensité et tension

Équations caractéristiques des principaux dipôles

Lois de Kirchoff

Équations de Maxwell

Équations de Maxwell

Équations de Maxwell dans le vide

Contact

— Enseignants chargés du cours magistral : Émilie Dupont et Abdelaziz Boumiz
— Bureau : Bâtiment Cauchy | Étage 3 | CY 308
— E-mail : `emilie.dupont@cyu.fr`
— E-mail : `abdelaziz.boumiz@cyu.fr`

L'équipe pédagogique

Cours Magistral (CM) : Émilie Dupont (Cergy), Abdelaziz Boumiz ; et Lucie Desplat (Pau)
Travaux dirigés (TD) :
Panayotis Akridas (Cergy) panayotis.akridas-morel@cyu.fr
Abdelaziz Boumiz (Cergy) abdelaziz.boumiz@cyu.fr
Lucie Desplat (Pau) lucie.desplat@cyu.fr
Émilie Dupont (Cergy) emilie.dupont@cyu.fr
Fabien Piguet (Cergy) fabien.piguet@cyu.fr

Quelques références

Liste non exhaustive de livres recommandés pour ce cours.

— José-Philippe Pérez, Robert Carles, Robert Fleckinger : « Électromagnétisme : Fondements et applications », Dunod ; 4e édition (20 janvier 2020)
— « Le Cours de physique de Feynman »(titre original : Feynman Lectures on Physics) de Richard Feynman, Robert B. Leighton (en) et Matthew Sands (en), Électromagnétisme 1.
— Jérôme Majou : « Super manuel de physique », MPSI, PCSI, PTSI, Bréal

Consultez le site du cours sur la plateforme.
Allez voir aussi les sites : http://cpinettes.u-cergy.fr/S3-Electromag.html, https://etienneklein.fr/ et https://www.physagreg.fr/electromagnetisme1.php.
Regarder la chaîne youtube sciences étonnantes... Il y a beaucoup de ressources en ligne, apprenez à choisir les bonnes (et bien sûr gare aux fakesciences)

1 | Calculs de charges et forces électromagnétiques

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

Applications de cours

Exercice 1 – Calculs d'aire et de volume
En choisissant le système de coordonnées approprié :

1/ Calculer, en utilisant une intégrale double, la surface d'un disque de rayon R.

2/ Calculer, en utilisant une intégrale double, la surface de la paroi latérale d'un cylindre de hauteur h et de rayon R.

3/ Calculer, en utilisant une intégrale triple, le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon R.

Exercice 2 – Calculs de charge totale
En choisissant le système de coordonnées approprié :

1/ Calculer la charge totale contenue dans un fil de longueur L uniformément chargé dont la densité linéique vaut λ_0.

2/ Calculer la charge totale contenue dans un disque de rayon R uniformément chargé en surface dont la densité surfacique vaut σ_0.

3/ Calculer la charge totale contenue dans une boule de rayon R uniformément chargée en volume dont la densité volumique vaut ρ_0.

Exercices

Exercice 3 – Charge totale d'une distribution surfacique
On considère une sphère de centre O et de rayon R portant en sa surface une densité de charges

$$\sigma = \sigma_0(1 + \cos\theta)$$

où $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP})$
Calculer la charge totale portée par la distribution.

Exercice 4 – Noyaux atomiques *
Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a. On désigne par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$, le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

où ρ_0 est une constante positive.

1/ Donner les symétries et invariances de cette distribution de charges.

2/ Exprimer la charge totale Q du noyau.

Pour aller plus loin

Exercice 5 – Masse volumique de la Terre

On peut supposer, dans un modèle grossier, que la répartition de la masse de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R) n'est pas uniforme : le noyau terrestre, principalement formé de fer et de nickel, est plus dense que la croûte. La masse volumique ρ dépend donc de la distance r au centre C :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right)$$

Données : la densité du fer vaut environ 8 et celle des roches granitiques vaut environ 4.

1/ Exprimer la masse M de la Terre en fonction de R et ρ_0.

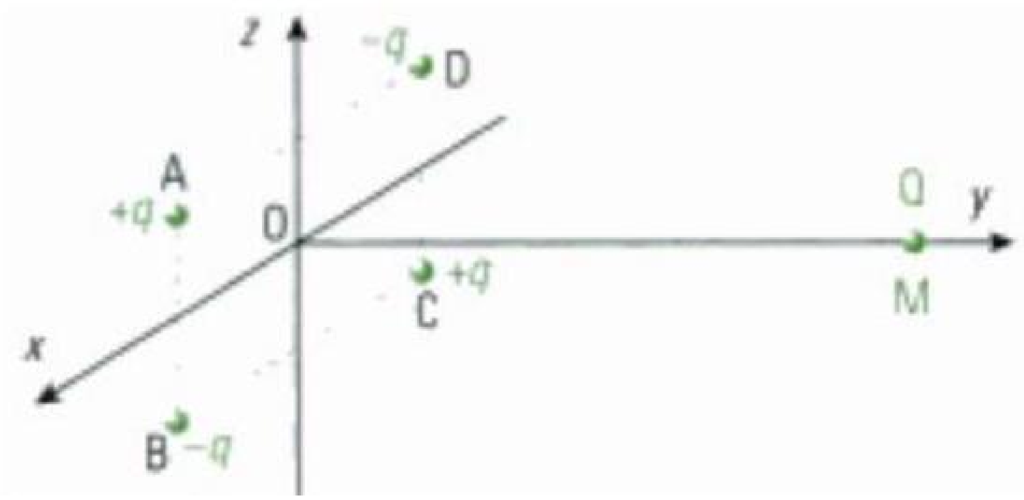
2/ Calculer numériquement la masse volumique au centre et à la surface de la Terre. Commenter. On donne $M = 6.0 \times 10^{24}$ kg et $R = 6.4 \times 10^3$ km

2 | Champ électrostatique

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

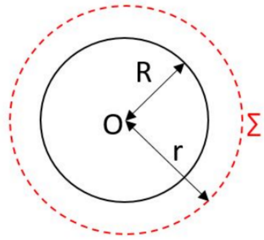
Loi de Coulomb

Exercice 1 – Distribution discrète de charges ponctuelles
Quatre charges électriques ponctuelles, de valeur absolue q, sont placées aux sommets d'un carré $ABCD$. Ce carré a pour côté $2a$, centre O et appartient au plan Oxz, comme le montre la figure ci-dessous.



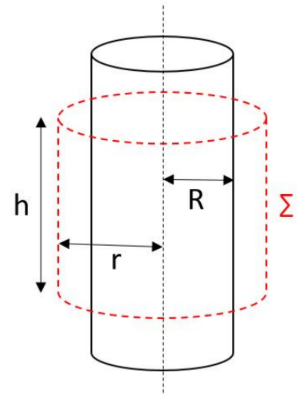
Déterminer l'expression de la force subie par la charge électrique Q placée en un point M quelconque de l'axe Oy.

Calculs de flux de champ électrique



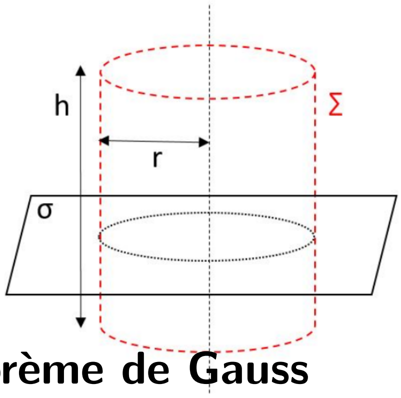
Exercice 2 – Symétrie sphérique

Soit une sphère, de rayon R, chargée uniformément.
En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers la surface Σ d'une sphère de rayon r. Les deux sphères ont le même centre.



Exercice 3 – Symétrie cylindrique

Soit un cylindre, de rayon R et de hauteur supposée infinie, chargé uniformément.
En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers la surface Σ d'un cylindre de rayon r et de hauteur h. Les deux cylindres ont le même axe.



Exercice 4 – Symétrie plane

Soit un plan infini chargé uniformément de densité σ.
En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers la surface Σ d'un cylindre de rayon r et de hauteur h. L'axe du cylindre est perpendiculaire au plan chargé.
(il serait intéressant de prendre $h/2$ de part et d'autre du plan).

Calcul de champ électrique avec le théorème de Gauss

Exercice 5 – Sphère uniformément chargée en volume

Une boule de centre O et de rayon R porte une densité volumique de charge uniforme ρ.

1/ Quelle est l'expression de la charge totale, notée Q, contenue dans la sphère ?

2/ Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en considérant le point M :
   a) à l'interieur de la sphère : $r < R$
   b) à l'extérieur de la sphère : $r > R$

3/ Le champ est-il continu à la traversée de la sphère ? À commenter.

4/ Tracer l'allure de $E(r)$.

Exercice 6 – Sphère uniformément chargée en surface

Une sphère de centre O et de rayon R porte une densité surfacique de charge uniforme σ.

1/ Quelle est l'expression de la charge totale, notée Q, sur la sphère ?

2/ Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en considérant le point M :
   a) à l'interieur de la sphère : $r < R$
   b) à l'extérieur de la sphère : $r > R$

3/ Le champ est-il continu à la traversée de la sphère ? À commenter.

4/ Tracer l'allure de $E(r)$.

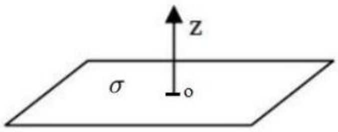
Exercice 7 – Distribution linéique de charges

1/ Calculer par intégration le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé en un point M quelconque de l'espace par une distribution linéique de charges de densité λ uniforme et répartie le long de l'axe des z.

2/ Retrouver ce résultat en calculant $\overrightarrow{E}$ en appliquant le théorème de Gauss.

Exercice 8 – Plan infini uniformément chargé

Soit un plan infini uniformément chargé en surface, de densité surfacique de charge σ séparant l'espace en deux demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$.



Appliquer le théorème de Gauss pour calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ engendré par cette distribution en tout point M de l'espace.
Remarquer la discontinuité du champ $\overrightarrow{E}$ en $z = z_{\text{plan}} (= 0 \text{ ici})$.

Lignes de champ

Exercice 9 – Lecture d'une carte de champ*

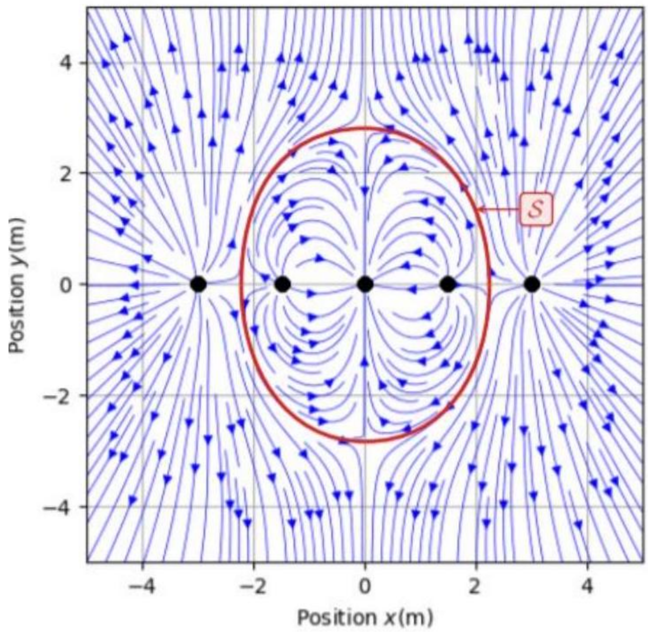
On donne ci-contre les lignes de champ électrostatique générées par une distribution de charges ponctuelles. Les charges sont numérotées de 1 à 5 de gauche à droite.

1/ Donner le signe de chacune des charges.

2/ Déterminer les éventuels plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge. Exprimer les charges q_4 et q_5 en fonction des autres.

3/ D'après les lignes du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, que peut-on dire de $\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS}$ en tout point de la surface S ?

4/ En déduire q_3 en fonction des autres charges.



Pour aller plus loin

Exercice 10 – Sphère chargée avec une cavité

Une sphère de rayon R porte une densité volumique de charge constante ρ, sauf dans une cavité sphèrique (de rayon a et dont le centre est à la distance d du centre de la grande sphère) creusée dans la sphère.
Calculer le champ électrique dans la cavité.

3 | Potentiel électrostatique

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

Gradient et champ électrique

Exercice 1 – Calcul de potentiel électrique
Le potentiel créé par une charge ponctuelle en un point M, situé à la distance r de la charge q, est (à une constante additive près) :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ qui dérive du potentiel V.

Calcul de potentiel et de champ électrique pour diverses symétries

Exercice 2 – Symétrie cylindrique
Soit un cylindre de rayon R et de hauteur infinie. Déterminer le potentiel électrostatique créé par la distribution surfacique de charges de densité σ répartie uniformément sur la surface de ce cylindre.

Exercice 3 – Symétrie sphérique
Soit une sphère de centre O et de rayon R (cf. exercice 6 du TD2). Déterminer le potentiel électrostatique créé par la distribution surfacique de charges de densité σ répartie uniformément sur la surface de cette sphère.

Exercice 4 – Symétrie axiale *
Un champ de vecteur $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel V qui a la symétrie de révolution autour de l'axe (Oz). On se place dans un plan contenant l'axe (Oz). Dans ce plan, on adopte les coordonnées polaires, et l'on pose $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$. Le potentiel V a alors pour expression :

$$V = \left(\frac{K}{r^3}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

Déterminer les composantes du champ $\overrightarrow{E}$.

Pour aller plus loin

Exercice 5 –
Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{grad} f$ où f est le champ scalaire suivant :

1/ $f(x, y, z) = xy^2 - yz^2$

2/ $f(x,y,z) = xyz \times \sin(xy)$

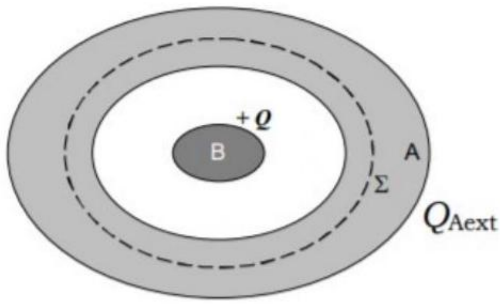
3/ On donne le champ scalaire $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calculer $\overrightarrow{grad}f$.
Discuter les symétries et invariances des champs f et $\overrightarrow{grad}f$.

4 | Conducteurs à l'équilibre électrostatique

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

Propriétés des conducteurs

Exercice 1 – Conducteur creux
Soit A, un conducteur creux.
On place en son sein un second conducteur noté B portant une charge $+Q$:

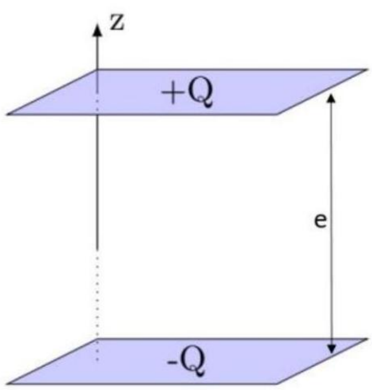


1/ Retrouver le fait que $Q_{A,int} = -Q_B = -Q$ en utilisant le théorème de Gauss. On note $Q_{A,\text{int}}$: charge surfacique présente au niveau de la surface intérieure de A.

2/ Calculer la charge extérieure $Q_{A,\text{ext}}$ (i.e. charge surfacique présente au niveau de la surface extérieure de A) dans les cas suivants :
   a) A est isolé et initialement neutre.
   b) A porte une charge initiale q

Calcul de la capacité

Exercice 2 – Condensateur plan
Un condensateur plan, placé dans le vide (ε_0), est constitué de deux armatures conductrices planes de surface S, parallèles entre elles, et séparées d'une distance e l'une de l'autre.
Dans cette étude, on se place dans l'approximation d'un condensateur plan infini.



1/ En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ crée par un plan infini chargé avec une densité de charge surfacique uniforme $(+\sigma)$.

2/ Déduire le champ entre les deux armatures du condensateur en fonction de la charge surfacique $(+\sigma)$ puis en fonction de la charge totale $(+Q)$ portée par l'armature $n°1$.

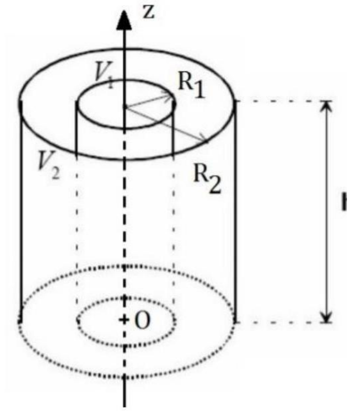
3/ En déduire la différence de potentiel $\Delta V = V_1 - V_2$ entre les armatures $n°1$ et $n°2$, puis la capacité C du condensateur en fonction de S, e et ε_0.

4/ *Application numérique* :
Pendant un orage, la surface de la Terre et la surface inférieure des nuages forment, avec une assez bonne approximation, un condensateur plan. On suppose que le nuage se trouve à 1000 mètres d'altitude et qu'il couvre une surface d'environ 20 km^2.
Quelle est la valeur de la capacité du condensateur formé par le système « Terre – Nuage » ?

Données : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ SI

Exercice 3 – Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique à air est formé de deux armatures coaxiales, de rayons notés R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. Ces deux cylindres infinis coaxiaux sont uniformément chargés en surface avec une charge Q_1 et Q_2 respectivement, telles que $Q_1 = -Q_2 = Q$.



1/ On suppose ici que ce conducteur est de longueur infinie. Déterminer $\overrightarrow{E}$ en un point M situé à la distance r de l'axe, avec $R_1 < r < R_2$.

2/ En déduire l'expression de la capacité C de ce condensateur. A.N. : $R_2 = 20$ cm, $R_1 = 10$ cm et $h = 50$ cm.

3/ Que devient l'expression de la capacité C lorsque les rayons sont voisins c-à-d : $R_2 - R_1 = e \ll R_1$.

Pour aller plus loin

Exercice 4 – *

On considère deux boules conductrices de rayons R_1 et R_2 dont les centres sont à une distance d grande devant R_1 et R_2. Elles portent les charges respectives Q_1 et Q_2, distribuées uniformément.

1/ Calculer les potentiels V_1 et V_2 de chacune des boules, en leur centre.

2/ On relie les boules par un fil conducteur. Calculer les charges $Q_{1'}$ et $Q_{2'}$, ainsi que les potentiels notés $V_{1'}$ et $V_{2'}$.

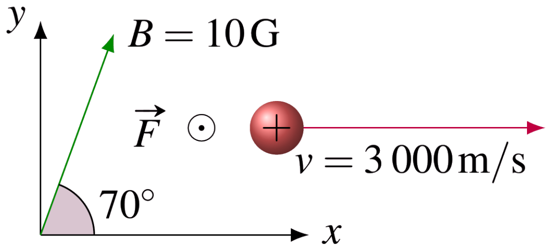
3/ En déduire la capacité de ce conducteur constitué des deux boules reliées par le fil conducteur.

5 | Force de Lorentz

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

Exercice 1 – Force magnétique sur une charge en mouvement

1/ Un proton se déplace vers la droite à 3000 m/s dans un champ de 10 G orienté dans la direction indiquée sur la figure.
Quelle est la force sur ce proton ? Donner l'expression littérale de cette force puis sa valeur numérique.



2/ Une charge de $1\,\mu$C se déplace dans une région où le champ magnétique est uniforme et constant.
Elle ne subit pas de force quand elle se dirige avec une vitesse de 5 m/s dans la direction de l'axe des x positifs. Elle subit cependant une force de 10^{-7} N dans la direction de l'axe des z positifs quand elle a une vitesse de $\overrightarrow{v} = (3\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j})\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont : $\overrightarrow{i}$ vecteur unitaire de l'axe x, $\overrightarrow{j}$ vecteur unitaire de l'axe y et $\overrightarrow{k}$ vecteur unitaire de l'axe z.
Quel est le champ magnétique ?

Exercice 2 – Force de Lorentz

Un proton ($q = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$) se trouve dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0{,}5\,\mathrm{T}$. On appelle x l'axe qui pointe dans la direction de ce champ.

À $t = 0\,\mathrm{s}$, le proton a une vitesse $\overrightarrow{v}$ avec $v_x(t=0) = 1{,}5 \times 10^5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_y(t=0) = 0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $v_z(t=0) = 2{,}0 \times 10^5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. De plus, on est au point $(0, 0, 0)$.

1/ Écrire la deuxième loi de Newton pour le proton à $t = 0\,\mathrm{s}$.

À $t > 0\,\mathrm{s}$, le proton a désormais une vitesse $\overrightarrow{v}$ à 3 composantes non nulles. $\overrightarrow{B}$ est toujours uniforme, constant orienté suivant x.

2/ Écrire les équations différentielles du premier ordre pour v_x, v_y et v_z à $t > 0\,\mathrm{s}$. On notera $\overrightarrow{\Omega} = -\frac{q}{m}\overrightarrow{B}$,

3/ Établir les deux équations différentielles du second ordre pour v_y et v_z.

4/ Montrer que la trajectoire du proton est une hélice qui a pour axe la droite parallèle à x d'équation $(z = 0; y = R)$, pour rayon $R = \dfrac{v_z(t=0)}{\Omega}$ et de pas $v_x(t=0)\dfrac{2\pi}{\Omega}$.

Exercice 3 – Spectromètre de masse

On envoie un atome de krypton ionisé 1 fois avec une vitesse de $40\,000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans un spectromètre de masse où règne un champ magnétique uniforme et constant de 0,6 T. L'atome frappe la plaque à une distance de 11,044 cm du point d'entrée de l'atome.

1/ Quelle est la masse de l'atome ?

2/ De quel isotope de l'atome pourrait-il s'agir ?

Pour aller plus loin

Exercice 4 – Particule dans des champs électrique et magnétique

Une particule de masse m et de charge q pénètre avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{u}_x$ dans une zone où existent un champ électrique $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_y$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u}_z$ uniformes et stationnaire.

1. À quelle condition le vecteur vitesse de la particule reste-t-il inchangé ?
2. Expliquer comment ce dispositif peut être adapté en sélecteur de vitesse.

Exercice 5 – Particule dans des champs électrique et magnétique

On considère un point matériel de charge $q > 0$ et de masse m, de vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ à l'entrée d'une zone où règnent un champ électrique $\overrightarrow{E}$ ou un champ magnétique $\overrightarrow{B}$. On suppose ces champs uniformes et indépendants du temps, et on néglige toute autre force que celles provoquées par ces champs.

La particule décrit une droite et possède une accélération constante a.

1. Déterminer la direction et la norme du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.
2. Déterminer la position du point matériel en fonction du temps.

La particule décrit une trajectoire circulaire de rayon R_0 dans un plan (xOy).

1. Déterminer la direction du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.
2. Déterminer la norme du champ en fonction de v_0 et R_0.

6 | Champ magnétostatique

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

Loi de Biot et Savart

Exercice 1 – Fil rectiligne infiniment long

1/ Calculer, par intégration en utilisant la *loi de Biot et Savart*, le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé en un point M quelconque par un fil rectiligne infiniment long et défini par l'axe (Oz).

2/ Retrouver ce champ magnétique $\overrightarrow{B}$ en appliquant le théorème d'Ampère.

Exercice 2 – Calcul de flux du champ magnétique pour un fil

Déterminer l'expression du flux $\Phi(\overrightarrow{B})$ du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I, à travers un rectangle dont le plan contient le fil, de dimension h (parallèle au fil) et b (perpendiculaire au fil).
Le côté le plus proche du fil se trouvant à la distance a. $(a < b < h)$

Exercice 3 – Spire

Calculer, par intégration en utilisant la *loi de Biot et Savart*, le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ (direction, sens et module) créé en un point M de l'axe de révolution d'une spire de centre O et de rayon R parcourue par un courant d'intensité I constante.

Calcul de champ magnétique avec le théorème d'Ampère

Exercice 4 – Solénoïde fini *

On considère un solénoïde (fini) de longueur L et comprenant N spires, chacune étant parcourue par un courant d'intensité I constante. Ces spires sont circulaires de rayon R et sont régulièrement enroulées sur un cylindre de révolution autour de l'axe $(z'z)$.

On cherche à déterminer complètement le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ en un point M quelconque de l'axe $(z'z)$. Le courant et l'axe $(z'z)$ sont orientés de manière directe (*règle du tire-bouchon*).

1/ Soit une longueur élémentaire dz de l'axe $(z'z)$ où se trouve le solénoïde. Quel nombre élémentaire dN de spires se trouvent entre la cote (z) et $(z + dz)$?

2/ Calculer le champ élémentaire $d\overrightarrow{B}(M)$ créé au point Mpar ces dN spires ?

3/ En déduire la valeur $B(z)$ du champ magnétique au point $M(z)$. On fera apparaître les angles α_1 et α_2 sous lesquels on voit, du point M, la spire d'entrée et la spire de sortie du solénoïde.

4/ Retrouver l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long, en utilisant le résultat précédent.

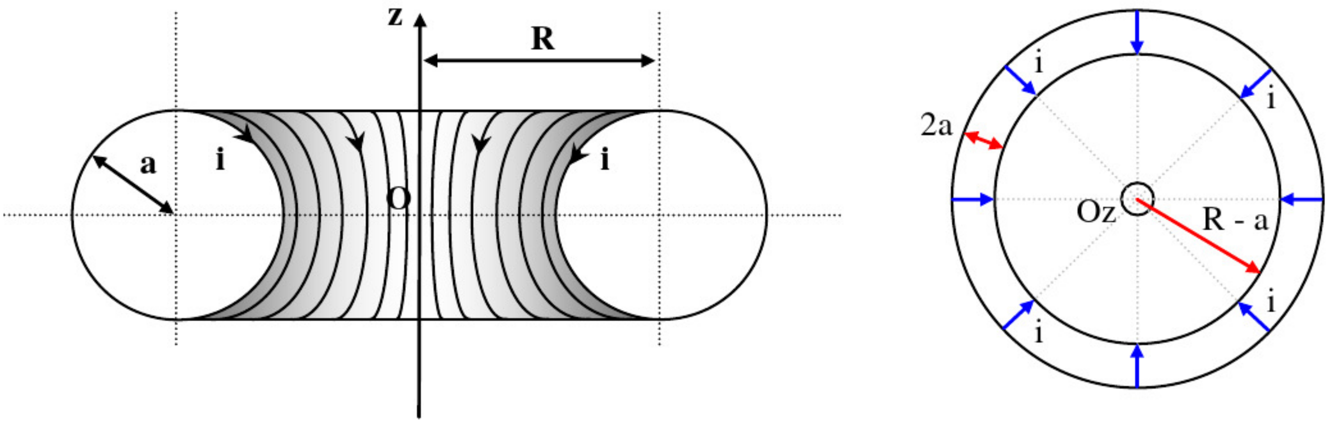
5/ Retrouver l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ à l'intérieur et à l'extérieur d'un solénoïde infiniment long en utilisant le théorème d'Ampère.

Pour aller plus loin

Exercice 5 – Tore circulaire

On veut étudier le champ magnétique créé par une distribution de courants présente sur un tore circulaire de rayon R à section circulaire de rayon a. On note O le centre du tore et (Oz) son axe de révolution. Une chambre à air gonflée, de vélo par exemple, constitue un tel tore.

La distribution de courants est constituée par un enroulement d'un grand nombre de N spires jointives circulaires de rayon a enroulées sur toute la surface du tore, le sens du courant étant donné sur la figure. On négligera l'épaisseur des fils.
Soit M un point quelconque de l'espace où l'on cherche le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par cette distribution.



1/ Étude qualitative
   a) Quel est le domaine de définition du champ magnétique ? Dans toute la suite, on considère que M appartient à ce domaine.
   b) Quelle est la direction de $\overrightarrow{B}$ en M ? Justifier la réponse.
   c) Que vaut $\overrightarrow{B}$ au point O ?
   d) Justifier le choix du système de coordonnées cylindriques d'axe (O, z). De quelle(s) coordonnée(s) dépend le module $\| \overrightarrow{B} \|$ du champ ?

2/ Montrer qu'en tout point situé à l'extérieur du tore, $\overrightarrow{B}$ est nul.

3/ Déterminer l'expression de $\overrightarrow{B}$ en un point quelconque de l'intérieur du tore.

7 | Équations de Maxwell

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

Conséquences des équations de Maxwell

Exercice 1 – Équations de Poisson
Établir les équations de Poisson vues en cours.

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A} + \mu_0 \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$$

Exercice 2 – Cylindre parcouru par un courant
En utilisant les équations locales de Maxwell, déterminer le champ magnétique créé par un cylindre plein, infiniment long, de rayon R, parcouru par un courant uniforme I, suivant sa longueur.

Exercice 3 – Champ électrique
Dans le demi-espace vide $x > 0$, il règne un champ électrique $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = E_0 cos(\omega t - kz).\overrightarrow{e}_x$, en coordonnées cartésiennes, avec ω et k deux constantes positives.

1. Calculer $div(\overrightarrow{E})$. Justifier le résultat obtenu.
2. Calculer $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}$ et donner l'expression de l'équation de Mawxell faisant intervenir la quantité $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}$.
3. Déterminer ainsi le champ magnétique $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t)$. On supposera que $\overrightarrow{B}$ n'a pas de terme constant.
4. Vérifier la valeur de sa divergence.
5. Déterminer la relation entre les constantes ω et k, à l'aide d'une autre équation de Maxwell, exprimée dans le vide.

Applications des équations de Maxwell

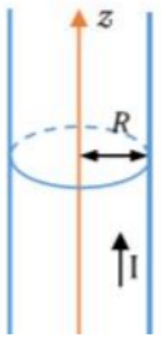
Exercice 4 – Conservation de la charge
Une sphère creuse, de rayon interne $R/2$ et de rayon externe R, est chargée, avec une charge de densité volumique de charge $\rho(r)$. La charge totale portée par cette sphère est égale à Q. Le champ électrostatique créé à la distance r du centre O, pour $R/2 \leq r \leq R$ a pour expression $\overrightarrow{E} = k(\alpha r - R)\overrightarrow{u}_r$ où $\overrightarrow{u}_r$ est le vecteur unitaire radial de la base de coordonnés sphériques. Le milieu est assimilable au vide.

1. Exprimer $\overrightarrow{E}(0)$.

2. Etablir l'expression de $\overrightarrow{E}(r)$ pour $0 < r \leq R/2$ à partir des équations locales de Maxwell. En déduire la valeur de α.
3. Etablir la loi $\rho(r)$. Calculer la charge totale et déduire la valeur de k.
4. A l'extérieur de la sphère, les résultats obtenus sont-ils compatibles avec le théorème de Gauss ?

Exercice 5 – Cylindre conducteur

Soit un cylindre conducteur de conductivité σ, de longueur h considérée comme infinie, parcouru par un courant stationnaire uniformément réparti, dans la direction de son axe, d'intensité I.



1. Déterminer le champ électromagnétique en tout point de l'espace.
2. En déduire le vecteur de Poynting en tout point de l'espace et son flux à travers la surface cylindrique du conducteur. Commenter le résultat obtenu.
3. Vérifier l'équation locale de Poynting en tout point. Commenter.

8 | Induction

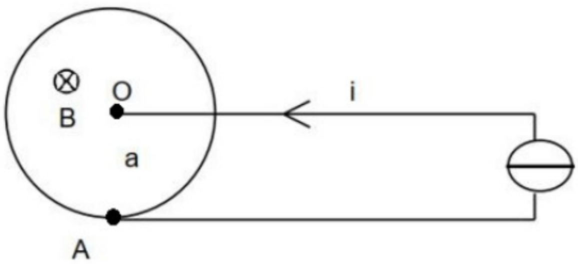
Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

Phénomènes d'induction

Exercice 1 – Roue de Barlow

Un disque conducteur de rayon a est libre de tourner autour de son axe horizontal passant par O. Un courant constant d'intensité i arrive en son centre O et repart par le point A, sur la périphérie. La roue est placée dans un champ magnétique horizontal, d'intensité B, uniforme et permanent.

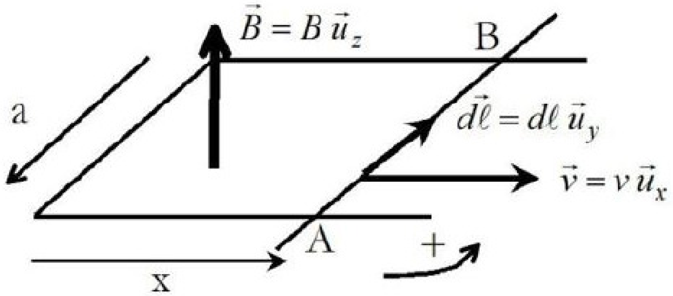
Calculer le moment Σ en O de la force de Laplace exercée sur le disque conducteur.



Exercice 2 – Rail de Laplace

La barre (AB), de longueur a et de masse m, de centre de masse d'abscisse $x(t)$ et de vitesse $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$ (avec $v = \dot{x}$) est lancée avec une vitesse initiale v_0 sur des rails métalliques sur lesquels elle glisse sans frottement.

Elle constitue avec les rails de résistance négligeable un circuit rectangulaire (C) de résistance R constante et d'inductance négligeable et dont la surface à l'instant t est $S(t) = ax(t)$.



Ce circuit est placé dans un champ magnétique permanent $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ d'origine extérieure à (C).

1/ Déterminer la fém induite.

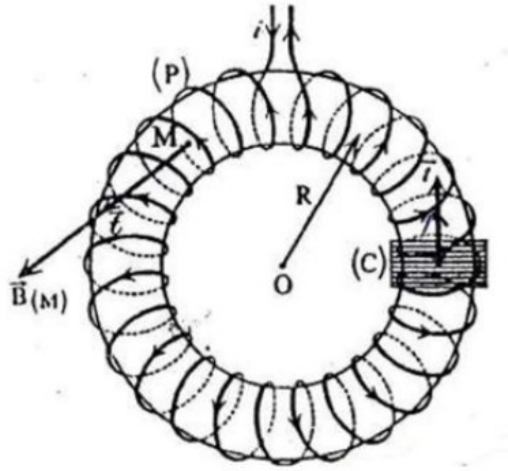
2/ En déduire l'expression du courant induit qui circule dans la barre.

3/ Établir l'équation différentielle de $v(t)$ et en déduire l'expression de la solution en tenant compte des conditions initiales.

4/ Montrer que l'énergie cinétique initiale de la barre se dissipera totalement en chaleur par effet Joule dans la résistance.

Inductance mutuelle

Exercice 3 – Tore circulaire

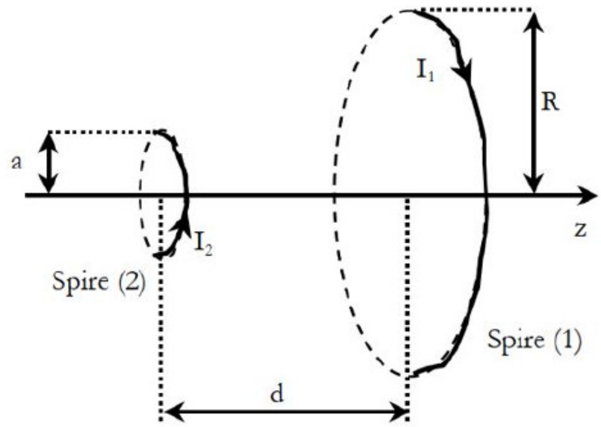


Sur un tore engendré par la rotation d'un cercle de rayon a sont bobinées N spires. On suppose que le rayon R moyen du tore est grand devant a. Sur cet enroulement P, une bobine C comportant n spires de rayon a est constituée.

Calculer le coefficient d'inductance mutuelle des deux enroulements P et C.

A.N : $N = 1600,\ n = 20,\ R = 15$ cm, $\ a = 3$ cm.

Exercice 4 – Inductance mutuelle de deux spires



Soient deux spires, l'une de rayon R et d'axe (Oz) et une seconde spire de même axe et de rayon $a << R$.
Ces deux spires sont à une distance d l'une de l'autre.

1/ Calculer $M_{1\to2}$.

2/ En déduire $M_{2\to1}$.

Circuits couplés

Exercice 5 – Plaque de cuisson à induction *

Le chauffage du fond métallique des casseroles et autres poêles de cuisson peut être réalisé par effet Joule des courants induits directement dans le fond de la casserole par un champ magnétique variable, les *courants de Foucault.*
Logé dans une table support en céramique, un bobinage alimenté en courant sinusoïdal, appelé *inducteur*, génère ce champ.
L'inducteur a un rayon de 5 cm et compte vingt spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 18$ mΩ et d'auto-inductance $L_1 = 30$ μH. Il est alimenté par une tension harmonique v_1 de pulsation ω.

Du point de vue électromagnétique, on modélise le fond de casserole par une spire circulaire unique, fermée sur elle-même, appellée *induit.*
L'induit a une résistance $R_2 = 8.3$ mΩ et une auto-inductance $L_2 = 0.24$ μH. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par couplage inductif entre l'inducteur et l'induit d'inductance mutuelle $M = 2$ μH.

1/ En s'appuyant sur un schéma électrique équivalent, établir les équations électriques relatives aux deux circuits.

2/ En déduire l'expression littérale de la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}}$.

3/ En déduire l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{V_1}}{\underline{I_1}}$ du système.

4/ La pulsation ω est choisie bien plus grande que R_1/L_1 et R_2/L_2. Simplifier les deux expressions précédentes et calculer numériquement leur module.

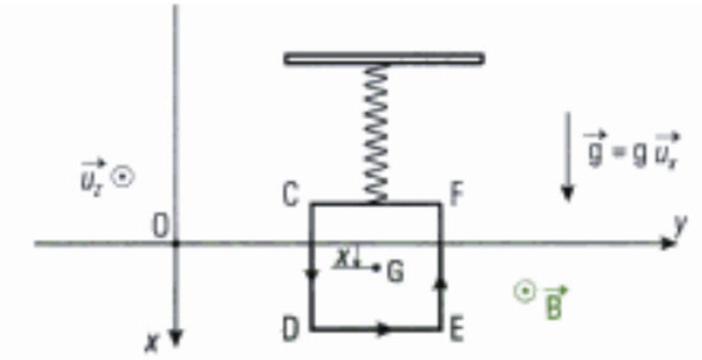
5/ On soulève la casserole. Indiquer qualitativement comment varie l'amplitude du courant appelé par l'inducteur.

Pour aller plus loin

Exercice 6 – Cadre de cuivre *

Un cadre de cuivre filiforme, de résistance R, de forme carrée de côté a, de masse m, est accroché à un ressort vertical de raideur k et de masse négligeable.

Le plan du cadre est vertical et, à l'équilibre, la moitié inférieure du cadre est situé dans un champ magnétique uniforme de module B, stationnaire et perpendiculaire au cadre.



1/ On abaisse le cadre d'une hauteur $a/2$ et on le lâche sans vitesse initiale. Établir l'équation différentielle du mouvement du cadre (repéré par sa position par rapport à l'équilibre).

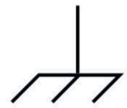
2/ On donne $k = 0,4$ N.m^{-1}, $B = 0,1$ T, $g = 10$ m.s^{-1}, $R = 0,5$ mΩ, $m = 50$ g et $a = 10$ cm. Déterminer la nature de la loi horaire.

9 | Électrocinétique

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont d'un niveau supérieur à celui exigible aux examens.

Rappels :

La masse, dans un circuit électrique, est la branche de référence des potentiels électriques. C'est-à-dire qu'on peut mesurer une tension électrique (= différence de potentiel) à partir de cette partie conductrice. Voici le symbole couramment utilisé pour la masse :



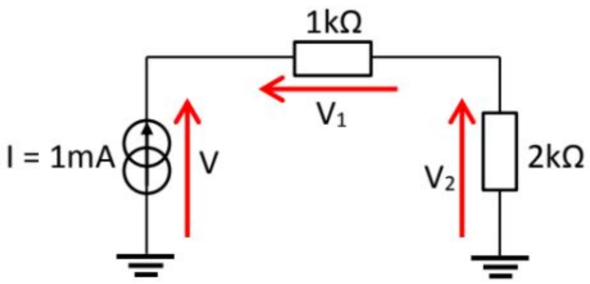
La mise à la terre permet ensuite d'annuler ou au minimum de réduire les risques de décharges électriques dans les installations industrielles, domestiques, et autres. Son potentiel est constant et sa valeur est conventionnellement fixée à 0 volt.

Pour saisir la différence entre la masse et la terre, il faut comprendre que la connexion de masse permet l'équipotentialité, c'est-à-dire la mise au même potentiel de plusieurs appareils, circuits et structures métalliques, alors que la terre permet de maintenir ce potentiel à zéro volt. La masse est donc une nécessité technique, alors que la terre est un impératif de sécurité.

Association de résistances

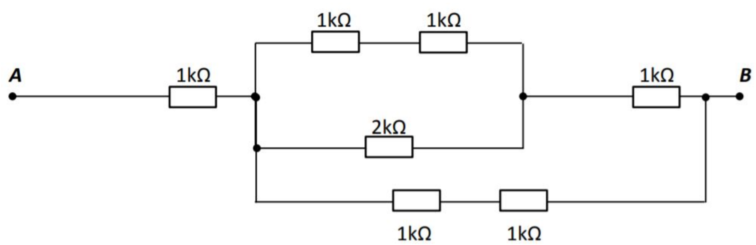
Exercice 1 – Générateur de courant

Soit le circuit suivant composé d'un générateur de courant (I) et de deux résistances. Quelle est la valeur de la tension V aux bornes du générateur de courant ?



Exercice 2 – Résistance équivalente

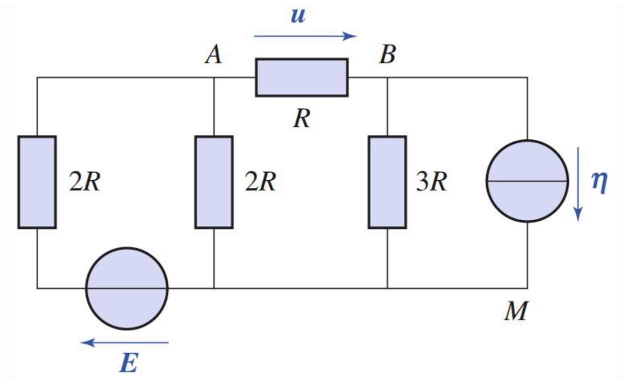
Soit le réseau de résistances suivant :



Calculer la valeur de la résistance équivalente notée R_{AB} entre A et B.

Loi des mailles

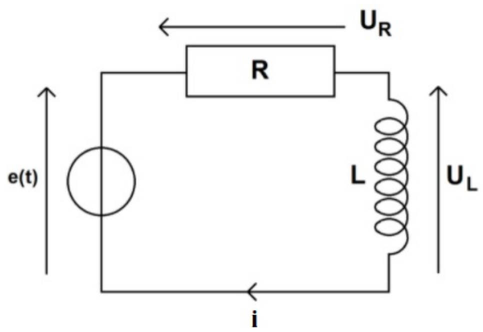
Exercice 3 – Association de dipôles
Soit le montage suivant :



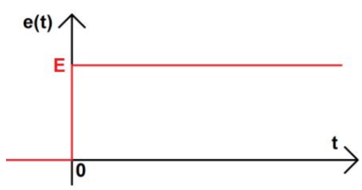
Calculer la différence de potentiel u dans le montage ci-dessus. On prendra $\eta = 0,2A$, $E = 3V$ et $R = 5\Omega$.

Circuit RL

Exercice 4 – Condensateur
On considère le circuit RL ci-dessous :



Le dipôle RL est soumis à l'échelon de tension suivant :



1/ Etablir l'équation différentielle (E) vérifiée par i.

2/ Pour $t > 0$, on écrit la solution i de la forme suivante : $i(t) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$ avec A, B et τ des constantes à déterminer. A quelles conditions (une portant sur τ et l'autre sur A), i est bien solution de (E) ?

3/ En tenant compte des conditions initiales, déterminer i. Déduire $u_L = f(t)$.

4/ Représenter graphiquement $i = f(t)$ puis $u_L = f(t)$.