TD8 : Représentation matricielle et changement de bases

Exercice 1

Déterminer les matrices, dans les bases canoniques, des applications linéaires suivantes:

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $f(x, y) = (x - y, 2x, 3x + 2y)$
2. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $g(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z)$
3. $f \circ g$ et $g \circ f$

Exercice 2

1. Donner la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par
$$f(x\,,y\,,z) = (x + 2y - z\,; 2x + 3y - 3z\,; x + y - 2z)$$
dans la base canonique.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ (et leurs bases).
3. Montrer que $((1\,,1\,,0)\,;(0\,,1\,,1)\,;(1\,,1\,,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2\,; \mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3\,; \mathbb{R}^2)$ définie par $g(x\,,y\,,z) = (x - 2y + z\,; z - x)$.

1. Quelle est l'image du vecteur $u = (2\,; -3)$ par f?
2. Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Les applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles définies? Si oui, donner leurs matrices dans les bases canoniques.
4. Établir l'expression analytique de $f \circ g$.

Exercice 4

Soit g une endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit M la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer $\det(M)$
2. g est-elle injective?
3. Calculer le rang de M.

Exercice 5

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et on considère A la matrice de f dans la base canonique de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression analytique de f.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
3. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 0), u_3 = (1, 0, -1)$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.
   (c) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Donner la relation entre A, D, P et P^{-1}.
   (e) Calculer P^{-1}.

Exercice 6

1. Expliquer pourquoi toute application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas surjective.
2. Expliquer toute application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas injective.
3. Calculer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

Exercice 7

Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (2x+y+z, x, y+z) \end{aligned}$$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. Déterminier une base du noyau et de l'image de f.
3. On considère les vecteurs $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,0), u_3 = (1,0,-1)$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.
   (c) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Donner la relation entre A, D, P et P^{-1}.
   (e) Calculer P^{-1}.

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad u_1 = (1,1,0) \quad ; \quad u_2 = (1,2,1) \quad ; \quad u_3 = (-1,-2,1)$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1\,; u_2\,; u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base canonique.
4. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Retrouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 9

Soit $B = \left(1 - 3X^2\,; 2 + X - 5X^2\,; 1 + 2X\right)$

1. Vérifier que B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\left(1\,; X\,; X^2\right)$ vers la base B.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $P \in E$, soit $f(P) = (X^2 + X + 1)P'' + X^2P' - 2XP$.

1. Montrer que pour tout $P \in E,\ f(P) \in E$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.
4. L'application f est-elle un isomorphisme de E? Justifier.
5. Soit $\mathcal{C} = \big(X\,; X^2\,; X^2 + X + 1\big)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E puis donner la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}$. Pour $P \in E$, on pose $f(P)$ le polynôme tel que $f(P)(X) = (1 - X)P'(X) + 3P(X)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$.
3. Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires dans E?
4. Soit $P_0 = 1$, $P_1 = 1-X$, $P_2 = (1-X)^2$ et $P_3 = (1-X)^3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0\,; P_1\,; P_2)\, P_3$ est une base de E.
5. Donner la matrice A' de f dans la base B' et calculer $(A')^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer la matrice de passage P de B à B' puis effectuer le produit $P \times P$. Que peut-on en déduire?
7. Déterminer f^n.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (17x - 28y + 4z, 12x - 20y + 3z, 16x - 28y + 5z)$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la base B_1 du noyau de f.
3. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^3 | f(u) = u\}$ l'ensemble des vecteurs invariants par f. Montrer que F est un espace vectoriel et déterminier une base B_2 de F.
4. Montrer que les deux espaces précédents sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de f dans la base $B = B_1 \cup B_2$.

Exercice 13

Montrer que les matrices A et B suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14

1. Vérifier que les matrices A et B suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer toutes les matrices P telles que $B = P^{-1}AP$.