Correction des exercices 10 et 12

Exercice 10.

1. Pour tout $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{aligned} f(P) &= (X^2+X+1)2a + X^2(2aX+b) - 2X(aX^2+bX+c) \\ &= 2a(X^2+X+1) + 2aX^3 + bX^2 - 2aX^3 - 2bX^2 - 2cX \\ &= 2a(X^2+X+1) + bX^2 - 2bX^2 - 2cX \in \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

2. D'après la question 1, f est une application de E dans E. Montrons que f est linéaire. Soient $P, Q \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X^2+X+1)(\lambda P+Q)'' + X^2(\lambda P+Q)' - 2X(\lambda P+Q) \\ &= (X^2+X+1)(\lambda P'' + Q'') + X^2(\lambda P' + Q') - 2X(\lambda P + Q) \\ &= \lambda\big((X^2+X+1)P'' + X^2P' - 2XP\big) + (X^2+X+1)Q'' + X^2Q' - 2XQ \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme de E.

3. Notons $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est-à-dire $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(P_0) &= -2X = 0P_0 - 2P_1 + 0P_2, \\ f(P_1) &= -X^2 = 0P_0 + 0P_1 - 1P_2, \\ f(P_2) &= 2 + 2X + 2X^2 = 2P_0 + 2P_1 + 2P_2, \end{aligned}$$

donc la matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{array}.$$

4. On calcule le déterminant de A en développant suivant la ligne 1 :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Puisque $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible, donc f est bijective. Par conséquent, f est un isomorphisme.

5. Notons $Q_1 = X$, $Q_2 = X^2$ et $Q_3 = X^2 + X + 1$. Écrivons la matrice de la base $\mathscr{C} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ relativement à la base $\mathscr{B}$:

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{array}.$$

On a $\det(P) = 1 \neq 0$ donc $\mathscr{C}$ est une base de E (ou alors, en permutant les lignes on voit que $\mathrm{rg}(P) = 3$). Cherchons la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.

Solution 1. On calcule les images des vecteurs de $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned}
f(Q_1) &= -X^2 = 0Q_1 - 1Q_2 + 0Q_3,\\
f(Q_2) &= 2X^2 + 2X + 2 = 0Q_1 + 0Q_2 + 2Q_3,\\
f(Q_3) &= X^2 + 2 = -2Q_1 - 1Q_2 + 2Q_3,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité peut se trouver en résolvant l'équation $X^2 + 2 = \alpha X + \beta X^2 + \gamma(X^2 + X + 1)$ d'inconnues α, β, γ. Par conséquent :

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccc} f(Q_1) & f(Q_2) & f(Q_3) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{array}
\end{array}.$$

Solution 2. On utilise la formule du changement de bases. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est la matrice P écrite plus haut. Son inverse est la matrice (faire le calcul !) :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ est donnée par :

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{C}) \arrow[r, "f", "B"'] \arrow[d, "P"'] & (E,\mathscr{C}) \\
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (E,\mathscr{B}) \arrow[u, "P^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien la matrice de la solution 1.

Exercice 12.

1. Notons $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculons l'image des vecteurs e_1, e_2, e_3 par f :

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= f(1,0,0) = (17,12,16) = 17e_1 + 12e_2 + 16e_3,\\
f(e_2) &= f(0,1,0) = (-28,-20,-28) = -28e_1 - 20e_2 - 28e_3,\\
f(e_3) &= f(0,0,1) = (4,3,5) = 4e_1 + 3e_2 + 5e_3,
\end{aligned}$$

donc la matrice de f dans la base canonique est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 17 & -28 & 4 \\ 12 & -20 & 3 \\ 16 & -28 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}
\end{array}.$$

2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
u\in\ker f &\iff f(u)=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\iff \begin{cases}17x-28y+4z=0\\12x-20y+3z=0\\16x-28y+5z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x\qquad\quad - z=0 & L_1\leftarrow L_1-L_3\\12x-20y+3z=0\\16x-28y+5z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}z=x\\15x-20y=0\\21x-28y=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}z=x\\3x-4y=0 & L_2\leftarrow \frac{1}{5}L_2\\3x-4y=0 & L_3\leftarrow\frac{1}{7}L_3\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}z=x\\y=\frac{3}{4}x\end{cases}\\
&\iff u=\left(x,\tfrac{3}{4}x,x\right).
\end{aligned}$$

Donc $\ker f=\mathrm{Vect}(u_1)$ avec $u_1=(4,3,4)$. Une base $\mathscr{B}_1$ de $\ker f$ est formée du vecteur u_1.
Remarque : on pouvait prendre $(1,\frac{3}{4},1)$ comme vecteur directeur, mais n'importe quel multiple non nul est aussi vecteur directeur. Je choisis un vecteur à coordonnées entières pour faciliter les calculs par la suite.

3. Une façon de montrer que F est un s.e.v. est de remarquer que l'équation $f(u)=u$ est équivalente à $f(u)-u=0_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire $(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u)=0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, F est le noyau de l'application linéaire $f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, donc c'est un s.e.v.
Une autre façon est de résoudre l'équation $f(u)=u$ et montrer que F est l'espace engendré par une famille de vecteurs, ce qui permet de déterminer une base de F en même temps. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
u\in F &\iff f(u)=u\\
&\iff \begin{cases}17x-28y+4z=x\\12x-20y+3z=y\\16x-28y+5z=z\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}16x-28y+4z=0\\12x-21y+3z=0\\16x-28y+4z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}4x-7y+z=0 & L_1\leftarrow\frac{1}{4}L_1\\4x-7y+z=0 & L_2\leftarrow\frac{1}{3}L_2\\4x-7y+z=0 & L_3\leftarrow\frac{1}{4}L_3\end{cases}\\
&\iff z=-4x+7y\\
&\iff u=(x,\ y,\ -4x+7y)\\
&\iff u=xu_2+yu_3,
\end{aligned}$$

avec $u_2=(1,0,-4)$ et $u_3=(0,1,7)$. Donc $F=\mathrm{Vect}(u_2,u_3)$. De plus, les vecteurs u_2 et u_3 sont libres (car non colinéaires), donc ils forment une base $\mathscr{B}_2$ de F.

4. *Solution 1.* Montrons que $\ker f$ et F sont en somme directe. Le vecteur directeur u_1 de $\ker f$ n'appartient pas à F car $f(u_1)\neq u_1$, donc la droite $\ker f$ n'est pas incluse dans le plan F. Par conséquent,

$\ker f \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(\ker f \oplus F) = \dim(\ker f) + \dim(F) = 1 + 2 = 3,$$

donc $\ker f \oplus F = \mathbb{R}^3$. Ainsi, $\ker f$ est F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Solution 2. Pour montrer que $\ker f$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, on peut montrer que la réunion de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculons par exemple le déterminant de la famille (u_1, u_2, u_3) relativement à la base canonique :

$$\begin{aligned}
\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u_1,u_2,u_3)\big) &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 7 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 20 & -4 & 7 \end{vmatrix} && (C_1 \leftarrow C_1 - 4C_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 20 & 7 \end{vmatrix} && (\text{developpement } C_2) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Le déterminant est non nul, donc $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, les sous-espaces $\ker f$ et F sont supplémentaires.

5. Puisque $u_1 \in \ker f$, on a $f(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et puisque $u_2, u_3 \in F$, on a $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = u_3$ (par définition, les vecteurs de F sont solutions de $f(u) = u$). Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}.$$