E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
2^e Année Classe Préparatoire

T.D. MATHEMATIQUES CPI. II

T.D. $n°$ 7 **Séries Entières**
le 04 janvier 2021

Ex.1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$a) \sum \frac{(2n)!}{n!n^n}\, z^n \qquad b) \sum (\sqrt[3]{n^3+n+2} - \sqrt{n^2+1}) z^n$$

$$c) \sum \frac{n^2+n}{2^n+n!}\, z^n \qquad d) \sum (\ln n)^n z^n$$

$$e) \ \sum (\exp(\sqrt{n+1}) - \exp(\sqrt{n}))\, z^n; \qquad f) \ \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} z^n$$

Ex.2

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$. On cherche les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0, c-a-d les solutions de la forme $y : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définies sur $]-R, R[$ avec $R > 0$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 2, a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$.
2) Déduire de la question 1) l'expression de a_{2p} et a_{2p+1} pour tout entier naturel p.
3) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficients a_n, ainsi que son comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.
4) Exprimer les solutions obtenues à l'aide de fonctions usuelles.

Ex.3

1) Déterminer le rayon de convergence de :

$$\sum \frac{x^n}{(n+2)n!}$$

2) On pose :

$$v_n(x) = \frac{x^n}{(n+2)n!}$$

Calculer la somme $W(x)$, de la série entière $\sum w_n(x)$ où :

$$w_n(x) = \int_0^x v_n(t)dt$$

3) En déduire la somme $V(x)$ de la série entière $\sum v_n(x)$, puis celle de la série numérique :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}.\frac{1}{n+2}$$

Ex.4 On considère la série entière :

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n;\quad x\in\ \mathbb{R}$$

a) Déterminer le rayon de convergence et étudier la convergence en R, et $-R$.

b) En notant S la somme de $\sum_{n\geq 1}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$, étudier la continuité de S.

c) Montrer que :

$$(1-x)S(x)\to\ 0\ ,\quad \text{quand}\quad x\to\ 1^-.$$

Ex.5

a) Montrer que la série entière ,

$$\sum_{n\geq 2}\left((-1)^n\ln n\right)x^n;$$

est de rayon $R=1$. On note S sa somme.

b) Montrer que $\forall\ \ x\in]-1,1[$,

$$S(x)=\frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})x^{n+1}$$

c) En déduire que

$$S(x)\to\ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})\quad \text{quand}\quad x\to\ 1^-$$

d) Calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n});\quad \text{en déduire que : } S(x)\to\ \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}\ \ \text{quand}\quad x\to\ 1^-.$$

Ex.6 En utilisant la série entière de terme général : $(-1)^n x^n$, déterminer la somme de la série numérique :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

Ex.7 Calculer la somme de la série :

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}$$

Ex.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1+x}$$

1) Calculer les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du D.S. en série entière de f. Etudier la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Quel est le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum a_n x^n \quad ?$$

Ex.9

Déterminer le dévelop. en série entière en 0 et donner le rayon de convergence correspondant , pour les fonctions :

1)
$$f_1(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

2)
$$f_2(x)=\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

3)
$$f_3(x)=\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$$

4)
$$f_4(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$