

---

**TD : Déterminants**

---

**Exercice 1**

Calculer les déterminants des matrices suivantes (on cherchera à trouver une méthode simple)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2**

Montrer que

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$$

**Exercice 3**

Pour  $a, b$  et  $c$  deux à deux distincts, factoriser :

$$\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$$

**Exercice 4**

Soit  $a, b, c, d$  des réels. On considère la matrice  $M$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de  $M$ .
2. Déterminer les valeurs de  $a, b, c$  et  $d$  qui annulent  $\det(M)$ .

**Exercice 5**

Soit  $x$  un réel. Calculer les déterminants respectivement d'ordre 4 et d'ordre  $n$  suivants :

$$D_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$