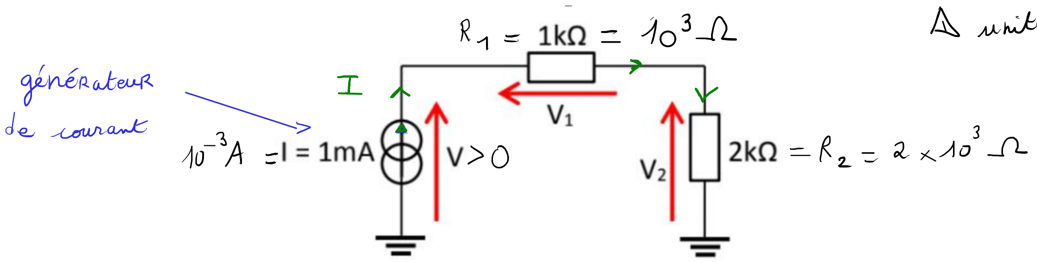
7 | Électrocinétique

Exercice 1 – Générateur de courant
Soit le circuit suivant composé dun générateur de courant (I) et de deux résistances. Quelle est la valeur de la tension V aux bornes du générateur de courant ?

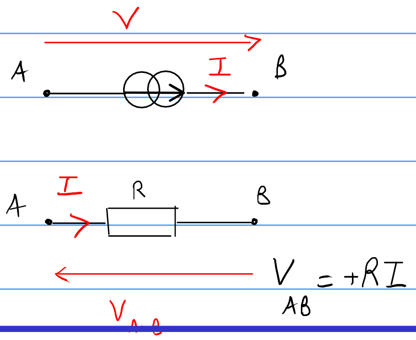
⚠ unités



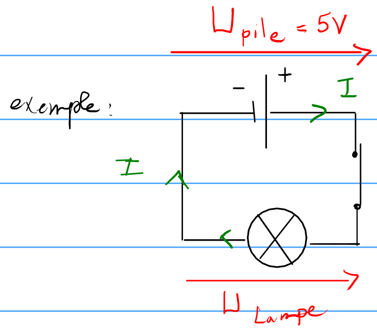
2 types de composants :

générateur — convention générateur

récepteur (résistance, condensateur, ...) — convention récepteur

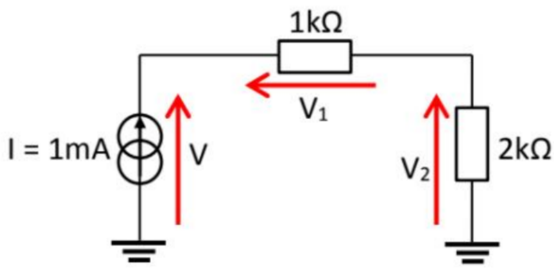


exemple :

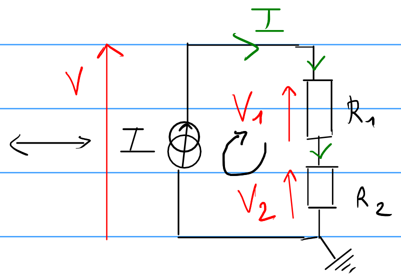


$U_{lampe} = U_{pile} = 5\,V$

une maille



⟷



même circuit avec deux résistances en série

loi des mailles : $V - V_1 - V_2 = 0 \iff V = V_1 + V_2$

loi d'Ohm : $V_1 = R_1 I$

$V_2 = R_2 I$

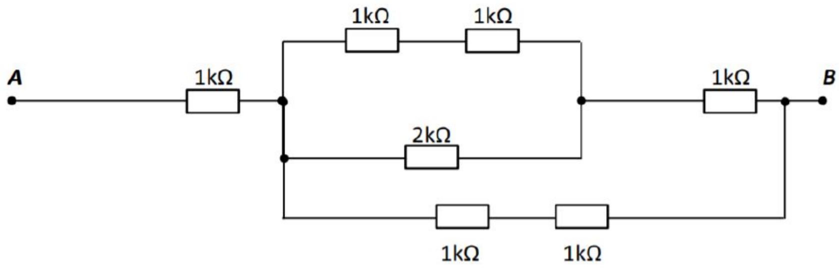
loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

donc $V = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{éq}} I = (1+2) \times 10^3 \times (1 \times 10^{-3}) = 3\,V$

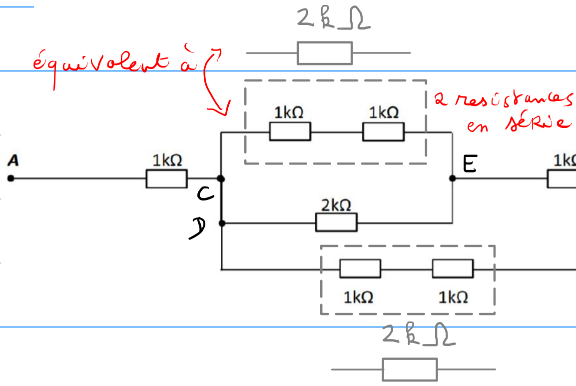
2 résistances en série

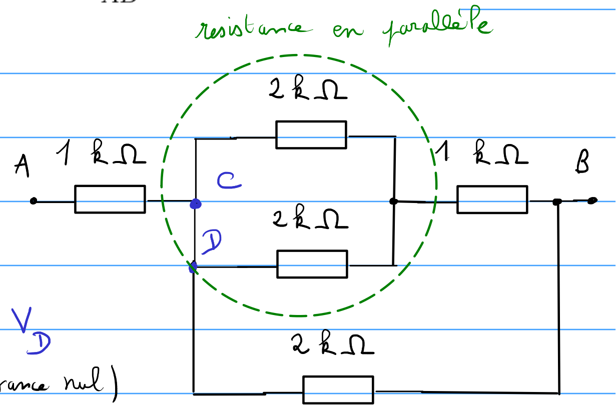
Exercice 2 – Résistance équivalente

Soit le réseau de résistances suivant :



Calculer la valeur de la résistance équivalente notée R_{AB} entre A et B.

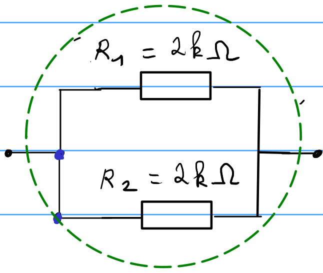


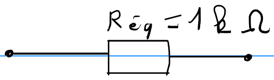


$V_C = V_D$

(fil = résistance nul)

Résistances en parallèle :



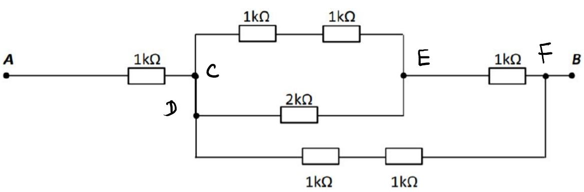


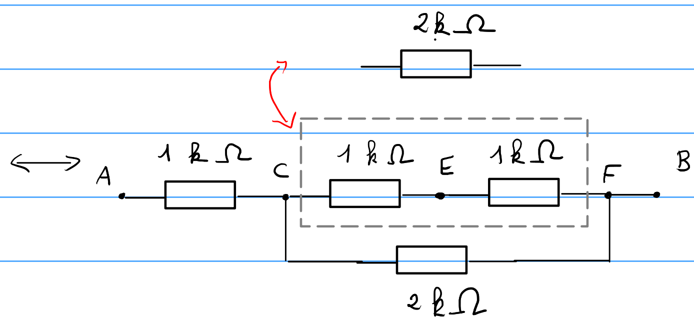
avec

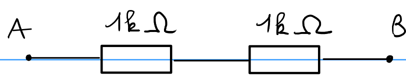
$$\boxed{\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

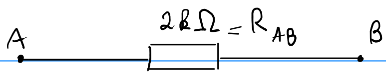
ici $\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow R_{éq} = \frac{1}{1} = 1\,k\Omega$

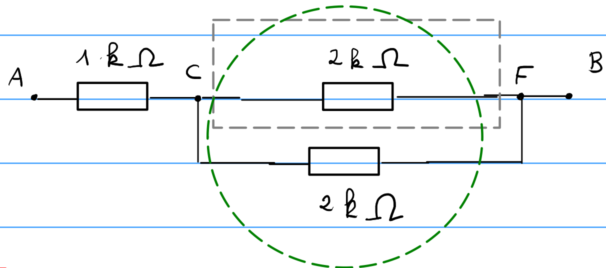
$k\Omega$











donc $\boxed{R_{AB} = 2\,k\Omega}$

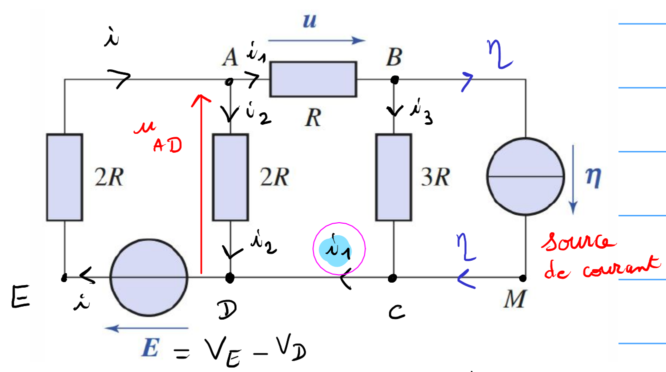
Exercice 3 – Association de dipôles

Soit le montage suivant :

$\eta = 0{,}2\ A$

$E = 3\ V$

$R = 5\ \Omega$



source de tension

(convention générateur)

u ?

$u = u_{BA} = V_B - V_A$

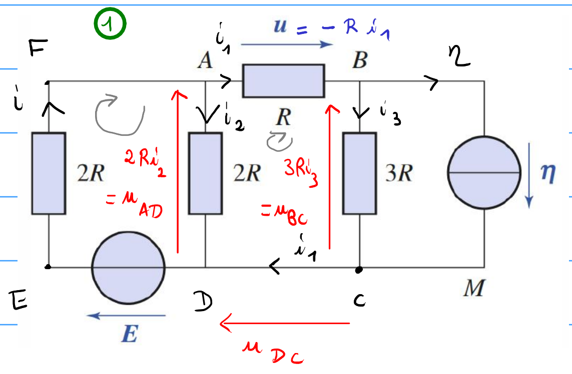
4 inconnues : i, i_1, i_2, i_3

Loi des noeuds : en A : $i = i_1 + i_2$ (i) $\longrightarrow$ en D : $i_1 + i_2 = i$

en B : $i_1 = \eta + i_3$ (ii) $\longrightarrow$ en C : $i_3 + \eta = i_1$

loi des mailles :

$\underbrace{V_E - V_F}_{u_{EF}} = 2Ri$



loi des mailles avec somme des tensions $\longrightarrow = 0$

① $\underbrace{u_{ED}}_{=E} + \underbrace{u_{FE}}_{-u_{EF}} + \underbrace{u_{AF}}_{=0} + \underbrace{u_{DA}}_{-u_{AD}} = 0 \iff u_{ED} = u_{AD} + u_{EF} = 2Ri_2 + 2Ri =$

donc $E = 2R(i + i_2)$ (iii)

② $\underbrace{u_{DC}}_{=0\text{ (fil)}} + u_{AD} + u + \underbrace{u_{CB}}_{-u_{BC}} = 0 \iff u_{AD} = u_{BC} - u$

$u_{AD} = 2Ri_2 = u_{BC} - u = 3Ri_3 - (-Ri_1)$

$\iff 2\cancel{R}i_2 = (3\cancel{R}i_3 + \cancel{R}i_1)$

$2i_2 = 3i_3 + i_1$ (iv)

4 inconnues avec 4 équations couplées.

$u = -R\, i_1$? η, E données

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 & (i) \\ i_1 = \eta + i_3 & (ii) \\ E = 2R(i + i_2) & (iii) \\ 2\, i_2 = 3\, i_3 + i_1 & (iv) \end{cases} \qquad \begin{cases} i = (\eta + i_3) + i_2 & (i) \text{ avec } (ii) \\ i_1 = (\eta + i_3) & (ii) \\ i + i_2 = (E/2R) & (iii) \\ i_2 = \frac{1}{2}(3\, i_3 + i_3 + \eta) & (iv) \end{cases}$$

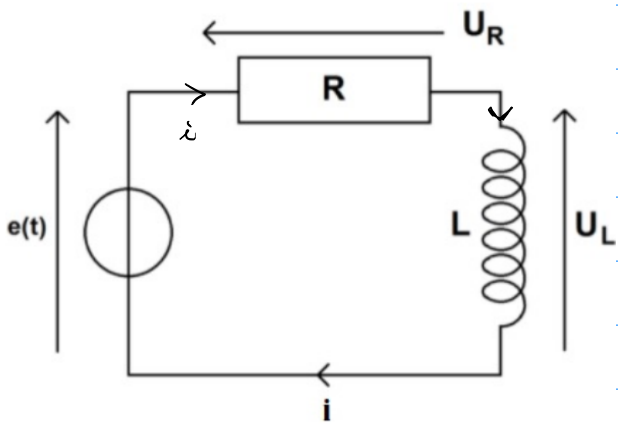
$$\begin{cases} i = \frac{3}{2}\eta + 3\, i_3 & (i) \\ i_1 = \eta + i_3 & (ii) \\ (E/2R) = 2\eta + 5\, i_3 \quad (i)\text{ et }(iv) & (iii) \\ i_2 = \left(\frac{\eta}{2} + 2\, i_3\right) & (iv) \end{cases} \qquad \begin{cases} i = \frac{3E}{10R} + \frac{3\eta}{10} & (i) \\ i_1 = \frac{E}{10R} + \frac{3}{5}\eta & (ii) \\ i_3 = \frac{E}{10R} - \frac{2}{5}\eta & (iii) \\ i_2 = \frac{2E}{10R} - \frac{3\eta}{10} & (iv) \end{cases}$$

donc $\underline{u} = -R\, i_1 = -\frac{E}{10} - \frac{3R}{5}\eta = -\left(\frac{3}{10} + \frac{3 \times \cancel{5}}{\cancel{5}} \times 0{,}2\right) = -(0{,}3 + 0{,}6) = \underline{-0{,}9\,V}$

remarque : théorème de superposition : éteindre une source à la fois et sommer

Exercice 4 – Condensateur

On considère le circuit RL ci-dessous :



1/ Etablir l'équation différentielle (E) vérifiée par i.

loi des mailles : $e(t) = u_R + u_L$ avec $u_R = R\, i$

$u_L = L \frac{di}{dt}$

$$e(t) = R\, i(t) + L \frac{di}{dt} \Longrightarrow \boxed{\frac{e(t)}{R} = i(t) + \boxed{\left(\frac{L}{R}\right)} \frac{di}{dt}} \quad (E)$$

dimension d'un temps noté $\tau = \frac{L}{R}$

2/ Pour $t > 0$, on écrit la solution i de la forme suivante : $i(t) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$ avec A, B et τ des constantes à déterminer. A quelles conditions (une portant sur τ et l'autre sur A), i est bien solution de (E) ?

pour $t > 0$: $e(t) = E$ donc (E) devient : $\boxed{i + \tau \frac{di}{dt} = \frac{E}{R}}$

résolution de l'équation différentielle : ⓐ $i + \tau \frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{i} = -\frac{dt}{\tau}$

$\ln(i) = -\frac{t}{\tau} + k \Rightarrow i(t) = Be^{-t/\tau} + A$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

ⓑ $A = \frac{E}{R}$

• ou $\frac{di}{dt} = 0 + \frac{B}{-\tau} e^{-t/\tau}$ et $i = A + Be^{-t/\tau}$ dans (E) :

$$A + Be^{-t/\tau} - \tau \frac{B}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} \Rightarrow A = \frac{E}{R}$$

3/ En tenant compte des conditions initiales, déterminer i. Déduire $u_L = f(t)$.

4/ Représenter graphiquement $i = f(t)$ puis $u_L = f(t)$.

3/ • $i(t) = \frac{E}{R} + B e^{-t/\tau}$ pour $t > 0$ avec les conditions initiales :

$i(0) = 0 = A + B$, $e(0^-) = 0$

$\Rightarrow B = -A = -\frac{E}{R}$ donc $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)}$

• $u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \cancel{L} \times \frac{E}{\cancel{R}}\left(- \times \left(\frac{-\cancel{R}}{\cancel{L}}\right) e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = E\, e^{-\frac{Rt}{L}}$