Polynômes

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

1. $Q(X)^2 = X \cdot P(X)^2$ d'inconnues P et Q dans $\mathbb{C}[X]$.
2. $P \circ P = P$ d'inconnue P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. $(P'(X))^2 = 4P(X)$

A faire chez soi

4. $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right) P(X)$ d'inconnue P dans $\mathbb{C}[X]$.
5. $P(X) - XP'(X) = X$

Exercice 2. Effectuer les division euclidienne de :

1. $\left(X^4 - X^3 + X - 2\right)$ par $\left(X^2 - 2X + 4\right)$.
2. $\left(3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1\right)$ par $\left(X^3 + X + 2\right)$.

A faire chez soi

3. $\left(3X^5 + 4X^2 + 1\right)$ par $\left(X^2 + 2X + 3\right)$
4. $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$

A faire chez soi

Exercice 3. Démontrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondants :

1. $(X-1) \mid \left(X^3 - 2X^2 + 3X - 2\right)$.
2. $(X-2) \mid \left(X^3 - 3X^2 + 3X - 2\right)$.
3. $(X+1) \mid \left(X^3 + 3X^2 - 2\right)$.

Exercice 4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ pour que le polynôme $\left(X^2+2\right)$ divise $\left(X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2\right)$.

Exercice 5. Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a \neq b$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est 1 et celui de la division euclidienne de P par $X-b$ est -1, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?

Pour aller plus loin

2. **Généralisation** : Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a), P(b), a$ et b.

A faire chez soi

Exercice 6. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ divisibles par $(X-1)$ et ayant le même reste dans les divisions euclidiennes par $(X-2), (X-3)$ et $(X-4)$.

$$\mathbb{R}_3[X] = \text{ ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3}$$

Exercice 7. Justifier les divisibilités suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, X^2$ divise $(X+1)^n - nX - 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (X-1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Exercice 8. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 , que l'on déterminera, tel que $(X-1)^2$ divise $(P(X)-1)$ et $(X+1)^2$ divise $(P(X)+1)$.

A faire chez soi

Exercice 9. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}_5[X]$ tels que $(X+2)^3$ divise $(P(X)+10)$ et que $(X-2)^3$ divise $(P(X)-10)$

Pour aller plus loin

Exercice 10. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.

Exercice 11. Montrer que le polynôme

$$P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

ne possède que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 12. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le polynôme P défini par $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle.

A faire chez soi

Exercice 13. Déterminer les polynômes P qui vérifient :

1. $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots$ jusqu'à l'infini.
2. $P(X+1) = P(X)$.
3. $\forall T \in \mathbb{R}^*, P(X+T) = P(X)$

Exercice 14. Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour aller plus loin

Exercice 15. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers tel que $a_0 a_n \neq 0$. Montrer que si $r = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, est une racine rationnelle de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

Exercice 16. Soit $P = \left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles
   (a) $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.
   (b) $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$. (on cherchera les racines doubles évidentes de S)
   Indication : Vous pouvez utiliser l'exercice 15.

Exercice 17. Dans chacun des cas suivants, factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X) = X^4 - 1$
2. $P(X) = X^4 + X^2 + 1$

3. $P(X) = X^6 + 1$
4. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$

A faire chez soi

5. $P(X) = \left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$
6. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
7. $P(X) = X^{12} - 1$

Pour aller plus loin

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un réel a fixé et un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a) > 0$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n, \quad P^{(k)}(a) \geq 0$$

Démontrer que P ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.

Exercice 19. Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer toutes les racines complexes de P sachant que deux d'entre elles ont 6 pour produit.

Exercice 20. Soit x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.