CY Tech

TD Algèbre

Polynômes.

Exercice 6.1

Résoudre les équations suivantes :

(1) $Q(X)^2 = X \cdot P(X)^2$ d'inconnues P et Q dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) $P \circ P = P$ d'inconnue P dans $\mathbb{C}[X]$.

(3) $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ d'inconnue P dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution : Nous allons résoudre chaque équation à l'aide du degré des polynômes.

Exercice 6.1

(1) $Q(X)^2 = X \cdot P(X)^2$ d'inconnues P et Q dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution : Supposons qu'il existe un couple de polynômes (P, Q) solution de la équation

$$Q(X)^2 = X \cdot P(X)^2.$$

On sépare le problème en trois cas :

- $P \neq 0$ **et** $Q \neq 0$: L'égalité $Q(X)^2 = X \cdot P(X)^2$ implique que

$$\begin{aligned} \deg\left(Q(X)^2\right) = \deg\left(X \cdot P(X)^2\right) \quad &\Longrightarrow \quad 2\deg(Q) = 1 + 2\deg(P) \\ &\Longrightarrow \quad 1 = 2(\deg(Q) - \deg(P)), \end{aligned}$$

  ce qui implique que 1 est un entier pair : c'est absurde. Donc, si P et Q sont solution de l'equation, alors il faut qu'au moins un des deux polynomes soit le polynome nul.

- $P = 0$: Alors

$$Q(X)^2 = X \cdot P(X)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q^2(X) = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q(X) = 0.$$

  Ainsi $Q = P = 0$. Il est immédiat que $P = Q = 0$ est solution de l'équation.

Exercice 6.1

- $Q = 0$: Alors

$$\begin{aligned} X \cdot P(X)^2 = Q(X)^2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad X \cdot P(X)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad P(X)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad P = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $P = Q = 0$. Donc le couple de polynôme nul est la seule solution possible.

Exercice 6.1

(2) Résoudre l'équation $P \circ P = P$ d'inconnue P dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution : Le polynôme nul est évidemment solution. Supposons qu'il existe un polynôme non nul P solution. Nous avons

$$\begin{aligned} P \circ P = P &\implies \deg(P \circ P) = (\deg(P)) \\ &\implies \deg(P)^2 = \deg P \\ &\implies \deg(P) = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(P) = 1 \\ &\implies P(X) = aX + b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Exercice 6.1

Maintenant

$$
\begin{aligned}
P \circ P = P \quad & \Longrightarrow \quad P(P(X)) = P(X) \\
& \Longrightarrow \quad a\,(aX + b) + b = aX + b \\
& \Longrightarrow \quad a^2X + ab + b = aX + b \\
& \Longrightarrow \quad (a^2 - a)X + ab = 0 \\
& \Longrightarrow \quad a(a-1) = 0 \quad \text{et} \quad ab = 0 \\
& \Longrightarrow \quad (a = 1 \ \ \text{et} \ \ b = 0) \quad \text{ou} \quad (a = 0 \ \ \text{et} \ \ b \in \mathbb{C}) \\
& \Longrightarrow \quad P(X) = X \quad \text{ou} \quad P(X) = b \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

On peut conclure que les polynômes P solutions sont les polynômes constants et celui défini par $P(X) = X$. Il est clair en effet que réciproquement, ces polynômes sont bien solutions.

Exercice 6.1

(3) Résoudre l'équation $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ d'inconnue P dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution : Le polynôme nul est évidemment solution. Supposons qu'il existe un polynôme non nul P solution. Nous avons

$$\begin{aligned} P(X^2) = (X^2+1)P(X) &\Longrightarrow \deg(P(X^2)) = (\deg((X^2+1)P)) \\ &\Longrightarrow 2\deg(P) = 2 + \deg P \\ &\Longrightarrow \deg(P) = 2 \\ &\Longrightarrow P(X) = aX^2 + bX + c \\ &\quad\ \ \text{avec} \ \ a \in \mathbb{C}^* \ \ \text{et} \ \ b, c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Exercice 6.1

Et on obtient alors

$$\begin{aligned}
P(X^2) = (X^2+1)P(X) \quad &\Longrightarrow \quad aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) \\
&\Longrightarrow \quad aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c \\
&\Longrightarrow \quad bX^2 + c = bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c \\
&\Longrightarrow \quad b = 0 \quad \text{et} \quad a + c = b \\
&\Longrightarrow \quad c = -a \quad \text{et} \quad b = 0 \\
&\Longrightarrow \quad P(X) = aX^2 - a \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}^*.
\end{aligned}$$

Les seuls polynômes P pouvant être solution sont donc finalement ceux s'exprimant sous la forme $P(X) = a(X^2-1)$, avec $a \in \mathbb{C}$. Réciproquement, soit P un tel polynôme, alors :

$$P(X^2) = a(X^4-1) = a(X^2+1)(X^2-1) = (X^2+1)P(X).$$

Conclusion : les solutions sont les polynômes P s'exprimant sous la forme $a(X^2-1)$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 6.2

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$:

(1) $(P'(X))^2 = 4P(X)$.

(2) $P(X) - XP'(X) = X$.

Solution :

(1) $(P'(X))^2 = 4P(X)$: Le polynôme nul est évidemment solution. Notons que tout autre polynome constant n'est pas solution de l'equation. Soit donc P solution de l'equation avec

$$\deg(P) \geq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(P'(X))^2 = 4P(X) \quad &\Longrightarrow \quad \deg(4P) = \deg\left((P')^2\right) \\
&\Longrightarrow \quad \deg(P) = 2\deg(P') = 2(\deg(P) - 1) \\
&\Longrightarrow \quad \deg(P) = 2 \\
&\Longrightarrow \quad P(X) = aX^2 + bX + c \\
&\qquad\quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b, c \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Exercice 6.2

Et on obtient alors

$$\begin{aligned}
(P'(X))^2 = 4P(X) \quad &\Longrightarrow \quad (2aX+b)^2 = 4(aX^2+bX+c)\\
&\Longrightarrow \quad 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c\\
&\Longrightarrow \quad 4a^2 = 4a \quad ; \quad 4ab = 4b \quad ; \quad b^2 = 4c\\
&\Longrightarrow \quad a(a-1) = 0 \quad ; \quad b(a-1) = 0 \quad ; \quad c = b^2/4\\
&\Longrightarrow \quad a = 1 \quad ; \quad b \in \mathbb{C} \quad ; \quad c = b^2/4\\
&\Longrightarrow \quad P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Les seules solutions possibles sont donc le polynôme nul et les polynômes P de la forme

$$X^2 + bX + \frac{b^2}{4}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

On vérifie réciproquement que tous les polynômes de ce type sont bien solutions.

Exercice 6.2

(2) $P(X) - XP'(X) = X$: Supposons que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$$

est solution de l'equation. Alors

$$\begin{aligned}
P(X) - XP'(X) = X \quad & \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = X \\
& \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k = X \\
& \Longrightarrow \quad a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - k a_k) X^k = X \\
& \Longrightarrow \quad a_0 = 0 \; ; \; (a_1 - a_1) = 1 \; ; \; \forall k > 1, \; a_k(1-k) = 0 \\
& \Longrightarrow \quad a_0 = 0 \quad ; \quad 0 = 1 \quad ; \quad \forall k > 1, \; a_k = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Donc le problème n'a pas de solution.

Exercice 6.3

Effectuer la division euclidienne de : $(X^4 - X^3 + X - 2)$ par $(X^2 - 2X + 4)$.

Solution : On pose une division de polynômes comme on pose une division euclidienne de deux entiers. En effet

$$
\begin{array}{cccccccccc|l}
 & X^4 & - & X^3 & & & + & X & - & 2 & X^2 - 2X + 4 \\ \cline{11-11}
- & X^4 & - & 2X^3 & + & 4X^2 & & & & & X^2 + X - 2 \\ \cline{2-10}
 & & & X^3 & - & 4X^2 & + & X & - & 2 & \\
 & & - & X^3 & - & 2X^2 & + & 4X & & & \\ \cline{3-10}
 & & & & & -2X^2 & - & 3X & - & 2 & \\
 & & & & - & -2X^2 & + & 4X & - & 8 & \\ \cline{5-10}
 & & & & & & - & 7X & + & 6 &
\end{array}
$$

Alors on trouve

$$Q = X^2 + X - 2 \ (\textbf{Quotient}) \quad \text{et} \quad R = -7X + 6 \ (\textbf{Reste}).$$

On n'oublie pas de vérifier qu'effectivement $A = BQ + R$.

Exercice 6.3

Effectuer la division euclidienne de : $(3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1)$ par $(X^3 + X + 2)$.

Solution : On pose une division de polynômes comme on pose une division euclidienne de deux entiers. En effet

$$
\begin{array}{ccccccccccccc|l}
 & 3X^5 & + & 2X^4 & & & - & X^2 & + & & + & 1 & X^3 + X + 2 \\
- & 3X^5 & & & + & 3X^3 & + & 6X^2 & & & & & 3X^2 + 2X - 3 \\
\hline
 & & & 2X^4 & - & 3X^3 & - & 7X^2 & + & & + & 1 & \\
 & & - & 2X^4 & & & + & 2X^2 & + & 4X & & & \\
\hline
 & & & & & -3x^3 & - & 9X^2 & - & 4X & + & 1 & \\
 & & & & \text{-} & -3x^3 & & & - & 3X & - & 6 & \\
\hline
 & & & & & & & -9X^2 & + & X & + & 7 &
\end{array}
$$

Alors on trouve

$$Q = 3X^2 + 2X - 3 \ (\textbf{Quotient}) \quad \text{et} \quad R = -9X^2 - X + 7 \ (\textbf{Reste}).$$

On n'oublie pas de vérifier qu'effectivement $A = BQ + R$.

Exercice 6.4

Effectuer les divisions euclidiennes de :

- $(3X^5 + 4X^2 + 1)$ par $(X^2 + 2X + 3)$: **Solution :**

  $(3X^5 + 4X^2 + 1) = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) + (-41X - 47)$.

- $(X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9)$ par $(X^2 - 5X + 4)$: **Solution :**

  $(X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9) = (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) + (-268X + 261)$

Exercice 6.5

Démontrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondants :

1. $(X-1)|(X^3-2X^2+3X-2)$.
2. $(X-2)|(X^3-3X^2+3X-2)$.
3. $(X+1)|(X^3+3X^2-2)$.

Solution : Il suffit dans chaque cas d'effectuer la division euclidienne et d'observer que le reste de cette division est le polynôme nul. Nous avons :

1. $(X^3-2X^2+3X-2)=(X-1)(X^2-X+2)$.
2. $(X^3-3X^2+3X-2)=(X-2)(X^2-X+1)$.
3. $(X^3+3X^2-2)=(X+1)(X^2+2X-2)$.

Exercice 6.6

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a \neq b$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division euclidienne de P par $X - b$ est -1, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

(b) **Généralisation** : Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$, $P(b)$, a et b.

Exercice 6.6

(1) Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division euclidienne de P par $X - b$ est -1, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

Solution : Soit P un polynome satisfaisant les hypothèses. Le **Théorème de la division euclidienne**, nous dit qu'il existe $Q(X)$ et $R(X) \in \mathbb{C}[X]$, tels que

$$P(X) = (X - a)(X - b)Q(X) + R(X), \quad \deg(R) < \deg((X - a)(X - b)) = 2.$$

Comme $\deg(R) < 2$, on déduit que $R(X) = cX + d$ avec $c, d \in \mathbb{C}$. Nous allons déterminer c et d. Maintenant :

- puisque le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1, il existe $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X) = (X - a)Q_1(X) + 1 \quad \Longrightarrow \quad P(a) = 1.$$

- puisque le reste de la division euclidienne de P par $X - b$ est -1, il existe $Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X) = (X - b)Q_2(X) - 1 \quad \Longrightarrow \quad P(b) = -1.$$

Exercice 6.6

D'où on en déduit

$$\left\{\begin{array}{rl} 1 & = P(a) = R(a) = ac + d \\ -1 & = P(b) = R(b) = bc + d \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rl} 1 & = ac + d \\ -1 & = bc + d \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{rl} c & = \frac{2}{a-b} \\ d & = \frac{a+b}{b-a} \end{array}\right.$$

Le reste est donc

$$\begin{aligned} R(X) &= cX + d \\ &= \frac{2}{a-b}X + \frac{a+b}{b-a}. \end{aligned}$$

Exercice 6.6

(b) **Généralisation** : Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$, $P(b)$, a et b.

Solution : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le **Théorème de la division euclidienne**, nous dit qu'il existe $Q(X)$ et $R(X) \in \mathbb{C}[X]$, tels que

$$P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + R(X), \quad \deg(R) < \deg((X-a)(X-b)) = 2.$$

Comme $\deg(R) < 2$, on déduit que $R(X) = cX + d$ avec $c,\ d \in \mathbb{C}$. Nous allons déterminer c et d. Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} P(a) = R(a) = ac + d \\ P(b) = R(b) = bc + d \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} P(a) = ac + d \\ P(b) = bc + d \end{array}\right.$$
$$\implies \left\{\begin{array}{lll} c & = & \frac{P(b)-P(a)}{b-a} \\ d & = & \frac{bP(a)-aP(b)}{b-a} \end{array}\right.$$

Le reste est donc

$$R(X) = \frac{P(b)-P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a)-aP(b)}{b-a}.$$

Exercice 6.7

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ pour que le polynôme $(X^2 + 2)$ divise $(X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2)$.

Solution : Effectuons la division euclidienne de

$$(X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2) \quad \text{par} \quad (X^2 + 2).$$

Nous avons

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & + & X^3 & + & aX^2 & + & bX & + & 2 & X^2+2 \\
\text{-} & X^4 & & & + & 2X^2 & & & & & \overline{X^2+X+(a\text{-}2)} \\
\cline{2-10}
 & & & X^3 & + & (a-2)X^2 & + & bX & + & 2 & \\
 & & \text{-} & X^3 & & & + & 2X & & & \\
\cline{3-10}
 & & & & & (a-2)X^2 & + & (b-2)X & + & 2 & \\
 & & & & \text{-} & (a-2)X^2 & + & & + & 2(a-2) & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & + & (b-2)X & + & (6-2a) & \\
\end{array}
$$

Par conséquent

$$(X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2) = (X^2 + 2)(X^2 + X + (a-2)) + [(b-2)X + (6-2a)].$$

Exercice 6.7

Ainsi, le polynôme $(X^2 + 2)$ divise $(X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2)$ si et seulement si

$$(b - 2)X + (6 - 2a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 2 \quad \text{et} \quad a = 3.$$

La condition nécessaire et suffisante est donc

$$b = 2 \quad \text{et} \quad a = 3$$

Exercice 6.8

Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ divisibles par $(X-1)$ et ayant le même reste dans les divisions euclidiennes par $(X-2)$, $(X-3)$ et $(X-4)$.

Notation :

$$\mathbb{R}_3[X] \quad = \quad \text{ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3}$$

Solution : Soit P un polynome de degré au plus 3 dans $\mathbb{R}[X]$, vérifiant toutes ces propriétés. Nous avons

- $(X-1)$ divise P. Donc il existe un polynome de degre au plus 2

$$Q(X) = aX^2 + bX + c$$

tel que

$$P(X) = (X-1)Q(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c).$$

Exercice 6.8

Aussi

- puisque le reste dans la divisions euclidiennes de P par $(X-2)$, $(X-3)$ et $(X-4)$ est le même, on conclut qu'il existe

  $$Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad R \ \text{ un polynome constante}$$

  tel que

  $$\begin{aligned} P &= (X-2)Q_1(X) + R, \\ P &= (X-3)Q_2(X) + R, \\ P &= (X-4)Q_3(X) + R. \end{aligned}$$

  D'où on en déduit,

  $$\begin{aligned} P(2) &= (2-2)Q_1(2) + R = R, \\ P(3) &= (3-3)Q_2(3) + R = R, \\ P(4) &= (4-4)Q_3(4) + R = R. \end{aligned}$$

Exercice 6.8

Ainsi, à l'aide de l'égalité $P(X) = (X-1)(aX^2+bX+c)$, on conclut

$$\begin{aligned} R &= P(2) = 4a+2b+c, \\ R &= P(3) = 18a+6b+2c, \\ R &= P(4) = 48a+12b+3c. \end{aligned}$$

La résolution de ce système fournit

$$\left\{ \begin{aligned} R &= 4a+2b+c \\ R &= 18a+6b+2c \\ R &= 48a+12b+3c \end{aligned} \right. \implies \left\{ \begin{aligned} b &= -8a \\ c &= 18a \\ R &= 6a \end{aligned} \right. \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, P doit necéssairement satisfaire l'égalité

$$\begin{aligned} P(X) &= a(X-1)(X^2-8X+18) \\ &= aX^3 - 9aX^2 + 26aX - 18a, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On vérifie réciproquement que tous les polynômes de cette forme sont bien solutions.

Exercice 6.9

Montrer que le polynôme

$$P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

ne possède que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Solution : Utilisons un raissonement par l'absurde. Supposons donc $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine au moins double de P. Ainsi, α est une racine au moins simple de P'. Or

$$\begin{aligned} P'(X) &= 1 + X + \frac{3X^2}{3!} + \cdots + \frac{nX^{n-1}}{n!} \\ &= 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} P(X) - P'(X) = \frac{X^n}{n!} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\alpha^n}{n!} = P(\alpha) - P'(\alpha) = 0 - 0 = 0 \\ & \qquad (\alpha \textit{ est racine de } P \textit{ et } P') \\ &\Longrightarrow \quad \alpha = 0. \end{aligned}$$

Exercice 6.9

Or

$$\begin{aligned} P(0) &= 1 + 0 + \frac{0^2}{2!} + \cdots + \frac{0^n}{n!} \\ &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Contradiction ! car on a supposé que α est une racine. Donc P ne possède que des racines simples.

Exercice 6.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un réel a fixé et un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a) > 0$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n, \quad P^{(k)}(a) \geq 0.$$

Démontrer que P ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.

Solution : En utilisant la formule de Taylor en a, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Ainsi, pour tout $x \in [a, +\infty[$, nous avons

$$\begin{aligned} P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k &= P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &\underbrace{\geq}_{\text{car } x \geq a \text{ et } P^{(k)}(a) \geq 0} P(a) > 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $P(x) > 0$. On a bien montré ainsi que P ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.

Exercice 6.11

Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.

Solution : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ une éventuelle solution. Si $\deg(P) \leq 0$, alors la seule solution est clairement

$$P = 0.$$

Supposons donc que

$$\deg(P) = n \geq 1.$$

Comme par hypothèse P' divise P, on conclut qu'il existe un polynome $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X) = P'(X)Q(X).$$

Or

$$\begin{aligned} \deg(P') = \deg(P) - 1 \quad &\Longrightarrow \quad \deg(Q) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad Q(X) = \lambda(X - \alpha). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$P(X) = \lambda(X - \alpha)P'(X).$$

Exercice 6.11

Maintenant, si on applique la formule de Taylor à P en α, on obtient

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Formule qui nous permet d'écrire

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}k(X-\alpha)^{k-1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} P(X) &= \lambda(X-\alpha)P'(X) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\lambda k(X-\alpha)^k. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\lambda k(X-\alpha)^k.$$

Par identification, on conclut pour tout $k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$, l'égalité :

$$\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\lambda k \quad \Longrightarrow \quad \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(\lambda k - 1) = 0.$$

Exercice 6.11

Finalement, puisque $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$ (En effet

$$\deg P = n \implies P^{(n)}(X) = n! \cdot (\text{coefficient dominant de } P)),$$

on conclut

$$\begin{aligned} \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(\lambda n - 1) = 0 \quad & \implies \quad \lambda = \frac{1}{n} \\ & \implies \quad \forall k < n, \ \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$P(X) = \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} \cdot (X - \alpha)^n.$$

Ce qui prouve que $P(X)$ est de la forme $K(X - \alpha)^n$ avec $K \in \mathbb{C}$.
Réciproquement, on vérifie immédiatement que tous les polynômes de la forme précédente sont solution.

Exercice 6.12

Justifier les divisibilités suivantes :

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Solution :

(1) Soit $P(X) = (X+1)^n - nX - 1$. Commençons par noter que

$$X^2 \text{ divise } P \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \text{ est une racine de multiplicite au moins 2.}$$

Montrons donc que 0 est une racine au moins double de P. Si $n = 0$, alors P est le polynome nul et P est divisible par X^2. Supposons $n \geq 1$, alors nous avons

$$P(0) = (0+1)^n - n \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Ainsi 0 est une racine de P. De plus

$$P'(X) = n(X+1)^{n-1} - n \quad \Longrightarrow \quad P'(0) = n(0+1)^{n-1} - n = 0.$$

Ainsi 0 est une racine de P'. Par conséquent, 0 est une racine au moins double de P. Donc X^2 divise P.

Exercice 6.12

(2) Soit $P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Commençons par noter que

$$(X-1)^3 \text{ divise } P \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \text{ est une racine de multiplicite au moins } 3.$$

Montrons donc que 1 est une racine au moins triple de P. Nous avons

$$P(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$$

Ainsi 1 est une racine de P. De plus

$$\begin{array}{rcl} P'(X) & = & n(n+2)X^{n+1} \; - \; (n+2)(n+1)X^n + (n+2) \\ & \Longrightarrow & P'(1) = n(n+2) - (n+2)(n+1) + (n+2) = 0. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} P''(X) & = & n(n+1)(n+2)X^n \; - \; (n+2)(n+1)nX^{n-1} \\ & \Longrightarrow & P''(1) = n(n+1)(n+2) - n(n+2)(n+1) = 0. \end{array}$$

Ainsi 1 est une racine de P' et de P''. Par conséquent, 1 est une racine au moins triple de P. Donc $(X-1)^3$ divise P.

Exercice 6.13

Déterminer les polynômes P qui vérifient :

(1) $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots$ jusqu'à l'infini.

(2) $P(X+1) = P(X)$.

(3) La fonction polynomiale associée à P est périodique.

Exercice 6.13

(1) $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots$ jusqu'à l'infini.

Solution : Soit
$$Q(X) = P(X) - P(0).$$

Alors

$$0 = Q(0) = Q(1) = Q(2) = \cdots \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ Q(n) = 0.$$

Par conséquent, Q possède une infinité des racines, c'est donc le polynôme nul

$$0 = Q(X) = P(X) - P(0) \quad \Longrightarrow \quad P(X) = P(0).$$

Ainsi P est un polynome constante. Réciproquement, les polynômes constants étant solutions, les solutions sont les polynômes constants.

Exercice 6.13

(2) $P(X+1) = P(X)$.

Solution : Si $P(X) = P(X+1)$, alors

$$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = \cdots .$$

Nous sommes donc dans le cas précédent. Les solutions sont donc les polynômes constants.

Exercice 6.13

(3) La fonction polynomiale associée à P est périodique.

Solution : Soit T la période de P. Nous avons :

$$P(X) = P(X+T) \quad \Longrightarrow \quad P(0) = P(T) = P(2T) = P(3T) = \cdots .$$

Ainsi, si nous posons $Q(X) = P(X) - P(0)$, on conclut

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ Q(nT) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad Q \text{ admet une infinité des racines.}\\
&\Longrightarrow \quad Q(X) = 0\\
&\Longrightarrow \quad P(X) = P(0)\\
&\Longrightarrow \quad P \text{ est un polynôme constant.}
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc les polynômes constants.

Exercice 6.14

Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, que l'on déterminera, tel que

$$(X-1)^2 \text{ divise } (P(X)-1) \text{ et } (X+1)^2 \text{ divise } (P(X)+1).$$

Solution : Supposons que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ vérifie les hypothèses. Alors

$$\begin{aligned}
(X-1)^2 \text{ divise } (P(X)-1) \quad &\Longrightarrow \quad 1 \text{ est une racine au moins double de } P(X)-1 \\
&\Longrightarrow \quad 1 \text{ est une racine au moins simple de } \\
&\qquad\; (P(X)-1)' = P'(X) \\
&\Longrightarrow \quad P(1) = 1 \quad \text{et} \quad P'(1) = 0
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
(X+1)^2 \text{ divise } (P(X)+1) \quad &\Longrightarrow \quad -1 \text{ est une racine au moins double de } P(X)+1 \\
&\Longrightarrow \quad -1 \text{ est une racine au moins simple de } \\
&\qquad\; (P(X)+1)' = P'(X) \\
&\Longrightarrow \quad P(-1) = -1 \quad \text{et} \quad P'(-1) = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 6.14

D'où on conclut

$$\left\{\begin{array}{rcr} P(1) & = & 1 \\ P(-1) & = & -1 \\ P'(1) & = & 0 \\ P'(-1) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} a+b+c+d & = & 1 \\ -a+b-c+d & = & -1 \\ 3a+2b+c & = & 0 \\ 3a-2b+c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{E1-E2}{\overset{E3+E4}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl} 3a+c & = & 0 \\ 2a+2c & = & 2 \end{array}\right.$$

Ceci implique que

$$a = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{3}{2}.$$

D'où

$$2b = 3a + c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.$$

Donc $b = 0$. Puis

$$d = 1 - a - b - c = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0.$$

Donc l'unique posibilité pour P est

$$P(X) = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{2}X.$$

On vérifie facilement que ce polynôme est bien solution.

Exercice 6.15

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}_5[X]$ tels que $(X+2)^3$ divise $(P(X)+10)$ et que $(X-2)^3$ divise $(P(X)-10)$

Solution : Supposons que $P(X)$ vérifie les hypothèses. Alors

$$\begin{aligned}
(X+2)^3 \text{ divise } (P(X)+10) &\implies -2 \text{ est une racine au moins triple de } P(X)+10 \\
&\implies -2 \text{ est une racine au moins double de } (P(X)+10)' = P'(X) \\
&\implies (X+2)^2 \text{ divise } P'(X)
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
(X-2)^3 \text{ divise } (P(X)-10) &\implies 2 \text{ est une racine au moins triple de } P(X)-10 \\
&\implies 2 \text{ est une racine au moins double de } (P(X)-10)' = P'(X) \\
&\implies (X-2)^2 \text{ divise } P'(X)
\end{aligned}$$

Exercice 6.15

Ainsi

$$(X-2)^2 | P'(X) \;\text{ et }\; (X+2)^2 | P'(X)$$

Par conséquent

$$\exists Q(X) \in \mathbb{R}[X],\; P'(X) = (X-2)^2(X+2)^2 Q(X).$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \deg(P') & = & \deg(P) - 1 \leq 5 - 1 = 4 \quad \text{et} \\ \deg(P') & = & \deg((X-2)^2(X+2)^2 Q(X)) \\ & = & 4 + \deg(Q(X)). \end{array}$$

Par conséquent, $\deg(P') = 4$, d'où on conclut

$$\deg(Q(X)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q(X) = \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ainsi

$$P'(X) \;=\; \lambda (X-2)^2(X+2)^2 \;=\; \lambda (X^4 - 8X^2 + 16)$$

Exercice 6.15

Maintenant, nous savons que :

$$A'(X) = \lambda X^n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{C},\ A(X) = \frac{1}{n+1} \cdot \lambda X^{n+1} + \mu.$$

Par conséquent, comme $P'(X) = \lambda(X^4 - 8X^2 + 16)$, on conclut qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P(X) = \lambda \left(\frac{X^5}{5} - 8\frac{X^3}{3} + 16X \right) + \mu.$$

Finalement, puisque -2 est une racine de $P(X) + 10$ et 2 est une racine de $P(X) - 10$, on conclut que

$$P(2) = 10 \ \text{ et } \ P(-2) = -10.$$

D'où on déduit que

$$\lambda = \frac{75}{128} \ \text{ et } \ \mu = 0$$

(à vous de verifier, il suffit d'évaluer P en 2 et en -2 pour ensuite résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues).

Exercice 6.15

Donc l'unique posibilité pour P est

$$P(X) = \frac{5}{128}\left(3X^5 - 40X^3 + 240X\right).$$

On vérifie reciproquement que ce polynôme est solution.

Exercice 6.16

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le polynôme P défini par $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle.

Solution : Le polynôme P admet une racine multiple réelle r si et seulement si

$$P(r) = P'(r) = 0,$$

c'est-à-dire si seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} (r+1)^7 - r^7 - a & = & 0 \\ 7(r+1)^6 - 7r^6 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} (r+1)^7 - r^7 - a & = & 0 \\ (r+1)^6 - r^6 & = & 0 \end{array}\right.$$

Or

$$\begin{aligned} (r+1)^6 - r^6 = 0 & \iff (r+1)^6 = r^6 \\ & \iff (r+1)^3 = r^3 \ \text{ ou } \ (r+1)^3 = -r^3 \\ & \iff r+1 = r \ \text{ ou } \ r+1 = -r \\ & \iff r = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 6.16

Par conséquent, P admet une racine multiple réelle si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} r & = & -\frac{1}{2} \\ a & = & \left(-\frac{1}{2}+1\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} r & = & -\frac{1}{2} \\ a & = & \frac{1}{64} \end{array}\right.$$

Exercice 6.17

Soit $P = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers tel que $a_0a_n \neq 0$. Montrer que si $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, est une racine rationnelle de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

Solution : Soir $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Par hypothèse nous avons

$$\begin{aligned} P(r) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} S = a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} \quad &\Longrightarrow \quad S + a_0q^n = 0 \\ &\Longrightarrow \quad S = -a_0q^n, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T = a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \quad &\Longrightarrow \quad a_np^n + T = 0 \\ &\Longrightarrow \quad T = -a_np^n. \end{aligned}$$

Exercice 6.17

Maintenant

$$
\begin{array}{lcllcl}
p|S & \implies & p|(-a_0q^n) & \text{or} \quad q \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux} & \implies & p|a_0. \\
q|T & \implies & q|(-a_np^n) & \text{or} \quad q \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux} & \implies & q|a_n.
\end{array}
$$

Exercice 6.18

Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

(1) Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.

(2) Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?

(3) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution :

(1) Commeçons par rappeler que j correspond à la racine cubique de l'unité :

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quelques relations à connaître

$$j^3 = 1, \quad \overline{j} = j^2, \quad 1 + j + j^2 = 0.$$

C'est-à-dire j et $\bar{j}$ son les racines du polynôme :

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j}).$$

Exercice 6.18

Maintenant, puisque $j^3 = 1$, on déduit

$$\begin{aligned} P(j) &= j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 \\ &= j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 \\ &= 3(j^2 + j + 1) = 0. \end{aligned}$$

Pour trouver son ordre de multiplicité, nous allons calculer les dérivées de P. On a

$$\begin{aligned} & P'(X) &= 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X \\ \Longrightarrow\quad & P'(j) &= 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j \\ & &= 8j + 12j^2 + 12 + 4j \\ & &= 12(j^2 + j + 1) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi j est une racine au moins double de P.

Exercuce 6.18

Étudions sa deuxième dérivée

$$\begin{aligned} P''(X) &= 56X^6 + 60X^4 + 36X^2 + 4 \\ \Longrightarrow & \quad P''(j) = 56j^6 + 60j^4 + 36j^2 + 4 \\ & \quad\quad = 56 + 60j + 36j^2 + 4 \\ & \quad\quad = 36(j^2 + j + 1) + 24(j+1) \\ & \quad\quad = 24(j+1) \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi j est une racine double de P. Notons aussi que, puisque P est un polynome à coefficient réels, nous avons

$$P\left(\overline{j}\right) = \overline{P(j)} = 0.$$

Ainsi,

$$\overline{j} \quad \text{est aussi une racine double de } P.$$

Exercuce 6.18

(2) Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?

Solution : Nous avons

$$P \text{ est pair} \quad \Longrightarrow \quad P(-j) = P(j) = 0 \quad \text{et} \quad P\left(-\overline{j}\right) = P\left(\overline{j}\right) = 0.$$

Maintenant, notons que :

$$\begin{aligned} P'(-X) &= 8(-X)^7 + 12(-X)^5 + 12(-X)^3 + 4(-X) \\ &= -\left(8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X\right) \\ &= -P'(X). \end{aligned}$$

Ainsi, P' est impair. D'où on conclut

$$P' \text{ est impair} \quad \Longrightarrow \quad P'(-j) = -P'(j) = 0 \quad \text{et} \quad P'\left(-\overline{j}\right) = -P'\left(\overline{j}\right) = 0.$$

Ainsi $-j$ et $-\overline{j}$ sont de racines au moins doubles de P.De plus, vous pouvez rapidement vérifier que $P''(-j) \neq 0$ et $P''(-\overline{j}) \neq 0$. Par conséquent, $-j$ et $-\overline{j}$ sont de racines doubles de P.

Exercice 6.18

(3) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution : D'après les deux questions précédents, nous avons que j, $-j$, $\overline{j}$ et $-\overline{j}$ sont de racines de P de **multiplicité deux**. Le polynôme étant de **degré huit**, nous avons toutes les racines. Ainsi sur $\mathbb{C}[X]$ la décompositon de P est

$$P(X) = (X-j)^2(X+j)^2(X-\overline{j})^2(X+\overline{j})^2$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les termes conjugués

$$\begin{aligned}
P(X) &= (X-j)^2(X+j)^2(X-\overline{j})(X+\overline{j})^2 \\
&= ((X-j)(X-\overline{j}))^2((X+j)(X+\overline{j}))^2 \\
&= (X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2.
\end{aligned}$$

Exercice 6.19

Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

(1) Vérifier que i est racine de P.

(2) En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$

(3) Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles

  (a) $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.

  (b) $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$. (on cherchera les racines doubles de S)

Exercice 6.19

Solution :

(1) Nous avons

$$\begin{aligned} P(i) &= (i^2 - i + 1)^2 + 1 \\ &= (-1 - i + 1)^2 + 1 \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

(2) Comme P est un polynome à coefficient réels et i est une racine de P, nous pouvons conclure que $\overline{\ i\ } = -i$ est une racine de P. Ainsi

$$(X - i)(X + i) = X^2 + 1 \quad \text{divise} \quad P$$

En effectuant la division euclidienne de P par $X^2 + 1$, on trouve

$$P(X) = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2).$$

Ce dernier polynôme ne possède que de racines complexes, en effet, le discriminant de $X^2 - 2X + 2$ est negatif. Nous avons donc trouvé la décomposition en facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.19

(3)(a) $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

Solution : Nous avons

$$R \;=\; X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1 \;=\; \sum_{k=0}^{6} (-X)^k \;=\; \frac{1+X^7}{1+X}.$$

Les racines de R sont donc celles de $X^7 + 1$ sauf -1. Ainsi :

$$\begin{aligned} R(X) \quad &= \quad \left(X - e^{i\frac{\pi}{7}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{7}}\right)\left(X - e^{i\frac{3\pi}{7}}\right)\left(X - e^{-i\frac{3\pi}{7}}\right) \\ &\qquad \cdot \left(X - e^{i\frac{5\pi}{7}}\right)\left(X - e^{-i\frac{5\pi}{7}}\right). \end{aligned}$$

C'est la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$. Pour trouver la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les termes conjugués

$$\begin{aligned} R(X) \quad &= \quad \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)X + 1\right) \\ &\qquad \cdot \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)X + 1\right). \end{aligned}$$

Exercice 6.19

3(b) $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$. (on cherchera les racines doubles de S)

Solution : Déterminons les racines évidentes de S en remarquant que les racines réelles sont nécessairement positives. En effet, si $\alpha < 0$, alors

$$\begin{aligned}
S(\alpha) &= (\alpha)^5 - 13(\alpha)^4 + 67(\alpha)^3 - 171(\alpha)^2 + 216(\alpha) - 108 \\
&= (-|\alpha|)^5 - 13(-|\alpha|)^4 + 67(-|\alpha|)^3 - 171(-|\alpha|)^2 + 216(-|\alpha|) - 108 \\
&= -(|\alpha|)^5 - 13(|\alpha|)^4 - 67(|\alpha|)^3 - 171(|\alpha|)^2 - 216(|\alpha|) - 108 \\
&= -\left((|\alpha|)^5 + 13(|\alpha|)^4 + 67(|\alpha|)^3 + 171(|\alpha|)^2 + 216(|\alpha|) + 108\right) < 0.
\end{aligned}$$

De plus, d'après l'exercice **6.17**, si $\alpha = \frac{p}{q}$ est une racines rationnelle de S, alors

$$p \text{ divise } 108 \quad \text{et} \quad q \text{ divise } 1.$$

Ainsi, les racines rationnelle de S sont forcément des entières positifs et divisent 108. Maintenant

$$108 = 2^2 \cdot 3^3 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}.$$

Exercice 6.19

On constate que $S(2) = 0$, de plus

$$\begin{aligned} S'(2) &= 5(2)^4 - 52(2)^3 + 201(2)^2 - 342(2) + 216 \\ &= 80 - 416 + 804 - 684 + 216 = 0 \quad \text{et} \quad S''(2) \neq 0. \end{aligned}$$

Donc 2 est une racine double. De même, vous pouvez vérifier que

$$S(3) = S'(3) = S''(3) = 0 \quad \text{et} \quad S^{(4)} \neq 0.$$

Ainsi, 3 est une racine triple. Le polynôme S étant de **degré cinq**, nous avons toutes les racines. Sur $\mathbb{R}[X]$ la décompositon de S est donc

$$S(X) = (X-2)^2(X-3)^3.$$

Exercice 6.20

Dans chacun des cas suivants, factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

(1) $P(X) = X^4 - 1$

(2) $P(X) = (X^2 - X + 1)^2 + 1$

(3) $P(X) = X^4 + X^2 + 1$

(4) $P(X) = X^8 + X^4 + 1$

(5) $P(X) = X^6 + 1$

(6) $P(X) = X^{12} - 1$

(7) $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Exercice 6.20

(1) $P(X) = X^4 - 1$: Nous avons

$$X^4 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X^4 = 1.$$

Ainsi, les racines de P sont les racines quatrième de l'unité, donc

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \quad \text{Décomposition dans } \mathbb{C}[X] \\ & = & (X-1)(X+1)(X^2+1) \quad \text{Décomposition dans } \mathbb{R}[X]. \end{array}$$

Exercice 6.20

(2) $P(X) = (X^2 - X + 1)^2 + 1$: L'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
(X^2 - X + 1)^2 + 1 &= (X^2 - X + 1)^2 - i^2 \\
&= (X^2 - X + 1 - i) \cdot (X^2 - X + 1 + i) \\
&= (X^2 + 1 - (X + i)) \cdot (X^2 + 1 - (X - i)) \\
&= ((X + i)(X - i) - (X + i)) \cdot ((X - i)(X + i) - (X - i)) \\
&= \underbrace{(X + i)(X - i - 1)(X - i)(X + i - 1)}_{\text{Décomposition dans } \mathbb{C}[X]}
\end{aligned}$$

Pour trouver la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les termes conjugués :

$$\begin{aligned}
P(X) &= (X + i)(X - i)(X - 1 - i)(X - 1 + i) \\
&= (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2).
\end{aligned}$$

Exercice 6.20

(3) $P(X) = X^4 + X^2 + 1$: C'est un polynôme **bicarré** et nous savons que les racines de

$$1 + X + X^2$$

sont les racines troisièmes de l'unité j et $\bar{j} = j^2$ avec

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Ainsi, à l'aide de l'identité $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= \left(X^2 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) \\ &= \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X + e^{i\frac{2\pi}{3}}\right). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6.20

Pour trouver la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les termes conjugués :

$$\begin{aligned}
X^4+X^2+1 &= \left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\\
&= \left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\\
&= \left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)\\
&= \left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\\
&= \left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)\\
&= (X^2-X+1)(X^2+X+1).
\end{aligned}$$

Exercice 6.20

(4) $P(X) = X^8 + X^4 + 1$: Nous avons

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^4)^2 + (X^4) + 1$$

On utilise donc la même méthode que précédemment. Ainsi

$$\begin{aligned}
X^8 + X^4 + 1 &= \left(X^4 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X^4 - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) \\
&= \left(X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X^2 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X^2 + e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\
&= \left(X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\
&= \left(X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\frac{5\pi}{3}}\right) \\
&= \left(X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \\
&= \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \\
&\qquad \cdot \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6.20

Pour trouver la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les termes conjugués :

$$\begin{aligned}
X^8+X^4+1 &= \left(X-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\\
&\qquad\cdot\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X+e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\\
&= \left(X-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\\
&\qquad\cdot\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X-e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)\\
&= \left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)(X^2-X+1)(X^2+X+1)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right).
\end{aligned}$$

Exercice 6.20

(5) $P(X) = X^6 + 1$: Nous avons

$$X^6 + 1 = 0 \iff X^6 = -1 \iff X^6 = e^{i\pi}.$$

Les racines de P sont donc les racines 6^{es} de -1 :

$$e^{\frac{i\pi}{6} + \frac{2ki\pi}{6}}, \quad 0 \leq k \leq 5.$$

Donc

$$\begin{aligned} X^6 + 1 &= \prod_{k=0}^{5} \left(X - e^{\frac{i\pi}{6} + \frac{2ki\pi}{6}} \right) \\ &= \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) \\ &\qquad \cdot \left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$X^6 + 1 = (X - i)(X + i)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right).$$

et la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1).$$

Exercice 6.20

(6) $P(X) = X^{12} - 1$: Nous avons

$$X^{12} - 1 = 0 \iff X^{12} = 1.$$

Les racines de P sont donc les racines 12es de l'unité :

$$e^{\frac{2ik\pi}{12}}, \quad 0 \leq k \leq 11.$$

Donc

$$\begin{aligned} X^{12} - 1 &= \prod_{k=0}^{11} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{12}}\right) \\ &= (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\left(X - e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \\ &\quad \cdot \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) \end{aligned}$$

Ce qui corresponds à la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$. Pour trouver la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les termes conjugués

$$\begin{aligned} X^{12} - 1 &= (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \\ &\quad \cdot(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1) \end{aligned}$$

Exercice 6.20

(7) $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$: Nous avons

$$\begin{aligned} X^9 + X^6 + X^3 + 1 &= \left(X^3\right)^3 + \left(X^3\right)^2 + X^3 + 1 \\ &= \left(X^3\right)^2 (X^3 + 1) + (X^3 + 1) \\ &= (X^3 + 1)(X^6 + 1). \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} X^3 + 1 &= (X+1)(X^2 - X + 1) \\ &= (X+1)\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \quad \textit{(racines cubiques de } -1) \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la question 5, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} (X^6 + 1) &= (X+1)(X^2+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1) \\ &= (X - i)(X + i)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{5\pi}{3}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$\begin{aligned} X^9 + X^6 + X^3 + 1 &= (X+1)(X^2+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \\ &\quad \cdot (X^2 - \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

Exercice 6.20

Finalement, la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$\begin{aligned} X^9 + X^6 + X^3 + 1 &= (X+1)(X-i)(X+i)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \\ &\quad \cdot \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{5\pi}{3}}\right). \end{aligned}$$

Exercice 6.21

Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer toutes les racines complexes de P sachant que deux d'entre elles ont 6 pour produit.

Solution : Soient a, b, c et d les racines complexes de P. Nous avons

$$\begin{aligned} P &= X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \\ &= (X-a)(X-b)(X-c)(X-d) \\ &= X^4 - (a+b+c+d)X^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)X^2 \\ &\qquad - (abc+abd+acd+bcd)X + abcd \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a+b+c+d & = & 5 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd & = & 9 \\ abc+abd+acd+bcd & = & 15 \\ abcd & = & 18 \end{array} \right.$$

Exercice 6.21

Supposons que $ab = 6$. Le système devient alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c+d & = & 5 \\ ac+ad+bc+bd+cd & = & 3 \\ 6(c+d)+acd+bcd & = & 15 \\ cd & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c+d & = & 5 \\ ac+ad+bc+bd & = & 0 \\ 6(c+d)+3(a+b) & = & 15 \\ cd & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c+d & = & 5 \\ (a+b)(c+d) & = & 0 \\ (a+b)+2(c+d) & = & 5 \\ cd & = & 3 \end{array}\right.$$

D'où on conclut

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c+d & = & 5 \\ (a+b)(c+d) & = & 0 \\ (a+b)+2(c+d) & = & 5 \\ cd & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 5 \\ c+d & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 5 \\ ab & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} c+d & = & 0 \\ cd & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 6.21

Par conséquent, les racines de P satisfont

$$\begin{aligned} a \text{ et } b \text{ sont racines de } X^2-5X+6 \quad &\Longrightarrow \quad \{a,b\}=\{2,3\} \\ c \text{ et } d \text{ sont racines de } X^2+3 \quad &\Longrightarrow \quad \{c,d\}=\left\{i\sqrt{3},-i\sqrt{3}\right\} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de trouver la décomposition en facteurs irréductibles de P en $\mathbb{C}[X]$

$$P(X) \quad = \quad (X-2)(X-3)(X-i\sqrt{3})(X+i\sqrt{3}).$$

Exercice 6.22

Soit $x_1,\ x_2,\ x_3$ les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Solution : Comme $x_1,\ x_2,\ x_3$ sont les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} X^3 - 2X^2 + X + 3 & = & (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \\ & = & X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3. \end{array}$$

Donc par identification, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = & 1 \\ x_1x_2x_3 & = & -3. \end{array} \right.$$

De plus

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1^3 & = & 2x_1^2 - x_1 - 3 \\ x_2^3 & = & 2x_2^2 - x_2 - 3 \\ x_3^3 & = & 2x_3^2 - x_3 - 3. \end{array} \right.$$

En additionnant ces 3 dernières équations, on obtient

$$\begin{array}{rcl} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 & = & 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 9 \\ & = & 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2 - 9 \\ & = & 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 11. \end{array}$$

Exercice 6.22

Pour trouver la valeur de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, il suffit de noter que

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

Par conséquent

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4 - 2 = 2.$$

Ainsi

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4 - 11 = -7.$$