TD6: Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A.

Exercice 2

Démontrer que pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et exprimer A^{-1} dans ce cas.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire l'inversibilité de A et l'expression de son inverse.

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + I_3)^3$. En déduire l'inversibilité de A et l'expression de son inverse.

Exercice 5

Calculer l'inverse des matrices suivantes, s'il existe, par la méthode de Gauss-Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 7

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et exprimer son inverse.
2. Montrer que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et exprimer son inverse.
2. Montrer que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

On considère les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par les système récurrent

$$\begin{cases} (u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 2) \\ u_{n+1} = 4u_n - 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 2v_n - w_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Justifier qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$$
2. En déduire X_n en fonction de A, X_0 et de n.
3. On consdier la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$
4. En déduire l'expression explicites des suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n).