
TD : Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A .

Exercice 2Démontrer que pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bd)I_2 = 0.$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et exprimer A^{-1} dans ce cas.**Exercice 3**Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer $A^3 - A$. En déduire l'inversibilité de A et l'expression de son inverse.**Exercice 4**On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + I_3)^3$.En déduire l'inversibilité de A et l'expression de son inverse.**Exercice 5**

Calculer l'inverse des matrices suivantes, s'il existe par deux méthodes différentes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 7

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 8

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 9

On considère les suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par les système récurrent :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 1 \\ w_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 4u_n - 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - w_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n - 2v_n - w_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Justifier qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ que l'on précisera, telle que $\forall n \in \mathbf{N}, X_{n+1} = AX_n$.
En déduire X_n en fonction de A , de X_0 et de n .
2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire les expressions explicites des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .