Corrigé TD6: Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A.

Correction. 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$$

2. Nous avons donc $A^2 - A = 2I_3$, c'est-à-dire $A\left(\frac{A-I_3}{2}\right) = I_3$. Ce qui montrer que A est inversible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

□

Exercice 2

Démontrer que pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et exprimer A^{-1} dans ce cas.

Correction. La relation $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$ est facilement vérifiable une fois calculé :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

On a donc : $A\left((a+d)I_2 - A\right) = (ad - bc)I_2$.

Supposons que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. On a alors :

$$A\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] A = I_2$$

Donc A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si $ad - bc = 0$, alors $A(A - (a+d)I_2) = 0$ et donc la matrice A n'est pas inversible.

Conclusion : A est inversible $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, l'inverse éventuel étant celui formulé plus haut. $\square$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire l'inversibilité de A et l'expression de son inverse.

Correction. On vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On en déduit $A^3 - A = 4I_3$. Par conséquent :

$$A\left(\frac{1}{4}(A^2 - I_3)\right) = \left(\frac{1}{4}(A^2 - I_3)\right)A = I_3$$

Il en résulte que A est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + I_3)^3$. En déduire l'inversibilité de A et l'expression de son inverse.

Correction. On vérifie sans difficulté que $(A + I_3)^3 = 0$. On a donc, en utilisant la formule du binôme :

$$A^3 + 3A^2I_3 + 3AI_3^2 + I_3^3 = 0$$

C'est-à-dire aussi : $A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0$. On en déduit :

$$A(-A^2 - 3A - 3I_3) = (-A^2 - 3A - 3I_3)A = I_3$$

Par conséquent, A est inversible et :

$$A^{-1} = -A^2 - 3a - 3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 5

Calculer l'inverse des matrices suivantes, s'il existe, par la méthode de Gauss-Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse par la méthode de Gauss-Jordan.

Correction. En effectuant la pivot de Gauss on montre que la rang de A est 4, donc A est inversible. En terminant avec la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 53 & -58 & 17 & -15 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -18 & 21 & -6 & 6 \\ -12 & 12 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Exercice 7

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et exprimer son inverse.

2. Montrer que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction. Comme Exo 8. DM pour les étudiants

1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2^n + 3^n + 1 & -2^n + 1 & -2.2^n + 3^n + 1 \\ -3^n + 1 & 1 & -3^n + 1 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2.2^n - 1 \end{pmatrix}$

□

Exercice 8

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et exprimer son inverse.
2. Montrer que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ par la méthode de Gauss-Jordan.

2. On trouve $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est bien triangulaire supérieure.

3. On a : $T = I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. D'où par la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N = I_3 + nN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut alors en déduire, en tenant compte de $A = PTP^{-1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$$

□

Exercice 9

On considère les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par les système récurrent

$$\begin{cases} (u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 2) \\ u_{n+1} = 4u_n - 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 2v_n - w_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Justifier qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$$

2. En déduire X_n en fonction de A, X_0 et de n.

3. On consdier la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$

4. En déduire l'expression explicites des suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n).

Correction. 1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $X_n = A^n X_0$ ici $X_0 = (1, 1, 2)$ par récurrence.

3. Deux méthodes pour calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4.

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{n+1} - 1 & -2^n & -2^n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□