6 | Loi de Biot et Savart - Théorème de superposition et symétries

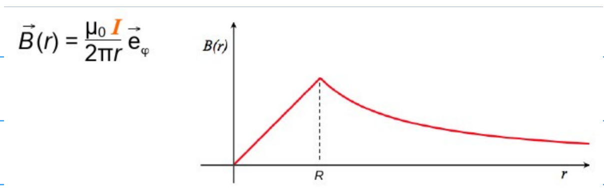
- https://cpinettes.u-cergy.fr/S3-Electromag.html

- Symétries :

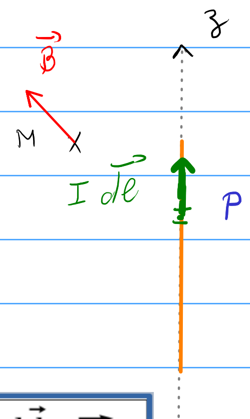
	champs	$\vec{E}$	$\vec{B}$	
	source du champ	charges q_i	courant I_j	invariances syst. de coord.
Symétrie	symétries par rapport aux sources	Π + − − + − + + −	I' I Π I I'	
Antisymétrie	antisym. pour les sources	Π^* + − + − − + − +	I' I Π^* $-I$ $-I'$	Symétrie plane + "signe −"
direction du champ	direction pour Π	$\vec{E} \in \Pi$: 2(Π) ⇒ direction de $\vec{E}$	$\vec{B} \perp \Pi$: 1(Π) ⇒ direction de $\vec{B}$	
	direction pour Π^*	$\vec{E} \perp \Pi^*$: 1(Π^*) ⇒ direction de $\vec{E}$	$\vec{B} \in \Pi^*$: 2(Π^*) ⇒ direction de $\vec{B}$	

Ex 1. Fil rectiligne infiniment long

a) Calculer, par intégration en utilisant la *loi de Biot et Savart*, le champ magnétique $\vec{B}$ créé en un point M quelconque par un fil rectiligne infiniment long et défini par l'axe (Oz).



?



Loi de Biot et Savart :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \int_{P\in fil} d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in fil}\frac{I\,d\vec{l}(P)\wedge\vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in fil}\frac{I\,d\vec{l}\wedge\vec{u}_{PM}}{r^2}}$$

⇒

- $\vec{B}(M)$ est continu en M lorsque M est dans une distribution volumique de courant,
- $\vec{B}(M)$ est discontinu en M lorsque M est sur une nappe de courant surfacique,
- $\vec{B}(M)$ diverge en M lorsque M est sur une distribution linéique de courant.

0) Définition, continuité de $\vec{B}$: distribution linéique (fil) du courant

$\Rightarrow$ $\vec{B}$ diverge sur le fil ($r = 0$: divergence)

1) Système de coordonnées choisi : coord. cylindriques $\vec{B}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

- Base $= (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$
- origine O ; sur le fil "où on veut" car fil ∞ $H = O$

H : projeté orthogonal de M sur l'axe Oz : $z_H = z_M$

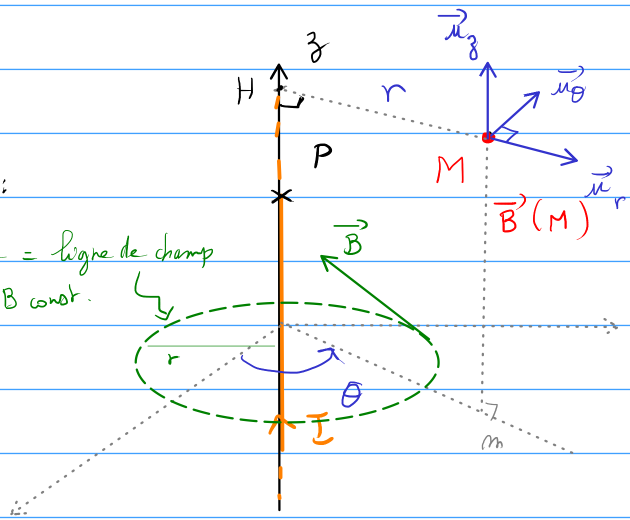
2) Invariances : (courant)

↳ invariance par rotation autour de l'axe Oz de la distrib. de courant :

$\vec{B}$ ind. de θ

↳ fil ∞ : invariance par translation selon z de la distrib. de courant :

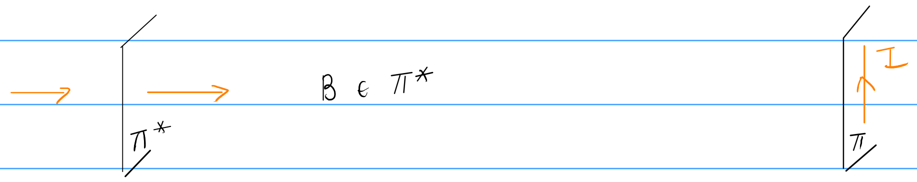
$\vec{B}$ ind. de z



$\vec{B}(r)$

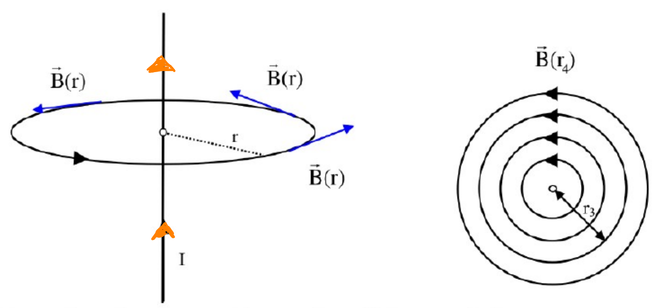
3) Symétries : $\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$ (cf question b))

- $\Pi^* = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ plan d'antisymétrie



- $\Pi = (M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ plan de symétrie $B \perp \Pi \Rightarrow \vec{B} = B\,\vec{u}_\theta$

Exemple du fil infini parcouru par un courant uniforme :



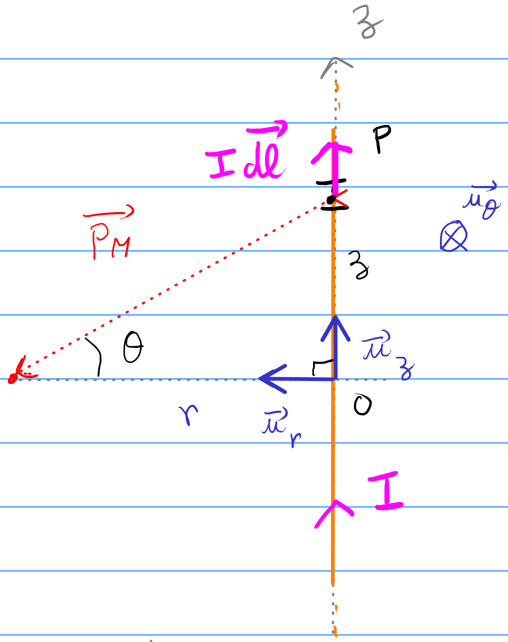
Lignes d'un champ magnétique orthoradial et vue du dessus

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$$

4) Théorème d'Ampère :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta$$

a) Loi de Biot et Savart :



Champ magnétique élementaire : $\vec{dB}(M)$

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}\right)$$

discontinuité sur le fil

Le champ total est la somme vectorielle de tous les champs élémentaires créés par tous les points P de l'axe

$z = z_P$

$$\vec{B} = \int_{fil} \vec{dB}(M) = \int_{fil} \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)}_{\text{constantes}} \left(\frac{I\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}\right)$$

$\vec{OM} = r\vec{u}_r$
$\vec{OP} = z_P\vec{u}_z = z\vec{u}_z$

↳ $I\vec{dl} = I\,dz\,\vec{u}_z$
↳ $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -\vec{OP} + \vec{OM} = (-z\vec{u}_z + r\vec{u}_r)$

$\|\vec{PM}\|^2 = z^2 + r^2$

$(\ )^3 = \left((\ )^2\right)^{3/2}$

$$\vec{B}(M) = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\int_{z=-\infty\ (fil)}^{+\infty} \frac{dz\,\vec{u}_z \wedge [-z\vec{u}_z + r\vec{u}_r]}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$= \vec{0}$

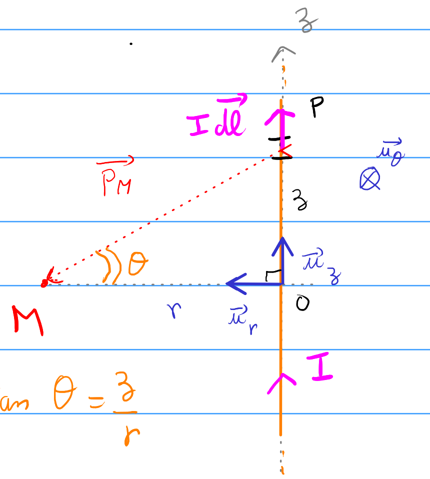
B.O.D cylindriques : $(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_z) = \vec{0}$
$(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r) = +\vec{u}_\theta$

base
direct
Ortho Normé

$+$
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)\ (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$
$-$

$$\vec{B}(M) = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\int_{z=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{r\,dz}{(z^2+r^2)^{3/2}}\vec{u}_\theta\right]$$

K



. ∀ position de P ⟺ ∀z , $\vec{u}_\theta$ inchangé

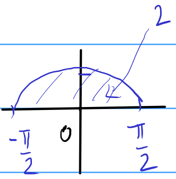
. changement de variable :

$$\left[(z^2+r^2)\right]^{3/2} = \left[r^2\left(\left(\frac{z}{r}\right)^2+1\right)\right]^{3/2} \quad \text{or} \quad \tan\theta = \frac{z}{r}$$

$z \in]-\infty, +\infty[\iff \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\tan\theta = \frac{z}{r}$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,dz}{\left[(r^2+z^2)\right]^{3/2}} \quad , \quad \vec{B}(M) = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right) K \,\vec{u}_\theta$$



$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,dz}{r^3\left[1+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{3/2}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{r^2}{r^3}\right)\frac{d\theta}{\cos^2\theta\left[1+\tan^2\theta\right]^{3/2}} = \frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta$$

$1/r$

Changement de variable : $\tan\theta = \dfrac{z}{r}$, $\quad z \to +\infty \;:\; \theta \to +\dfrac{\pi}{2}$; $\quad z \to -\infty \;:\; \theta \to -\dfrac{\pi}{2}$

$$\hookrightarrow dz = \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) d\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\tan\theta\right) d\theta = r\underbrace{\left(\frac{\partial \tan\theta}{\partial\theta}\right)}_{1/(\cos^2\theta)} d\theta$$

$$r\,dz = r^2\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\hookrightarrow 1+\tan^2\theta = \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right) \Rightarrow \cos^2\theta\left[1+\tan^2\theta\right]^{3/2} = \cos^2\theta \times \frac{1}{\cos^3\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$K = \frac{2}{r} \qquad \hookrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{2}{r}\right)\vec{u}_\theta = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)\vec{u}_\theta}$$

---

b) Retrouver ce champ magnétique $\vec{B}$ en appliquant le théorème d'Ampère.

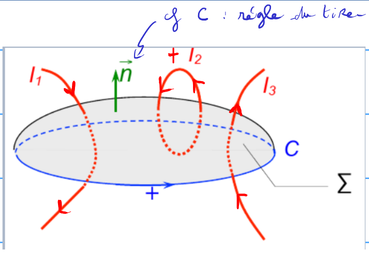
Théorème d'Ampère :

Distribution volumique de courant :

Pour une distribution (volumique de courant), le **théorème d'Ampère** s'écrit en régime permanent et dans l'ARQS : Quelque soit le contour fermé C, et quelque soit la surface S délimitée par C :

$$\boxed{\oint_{M\in C}\vec{B}(M)\cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 I_{enlacés} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}}$$

Avec le sens de $d\vec{S}$ fixé par le sens de $d\vec{l}$ avec la règle de la main droite (ou du tire-bouchon).



Ex : $I_{enlacés} = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{S} = +I_2 + I_3 - I_1 - I_2$ (cf. $\vec{n}$)

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0(-I_1+I_2-I_2+I_3) = \mu_0(-I_1+I_3)}$$

I_{alg} (comptée positivement si elle traverse S dans le sens de sa normale)

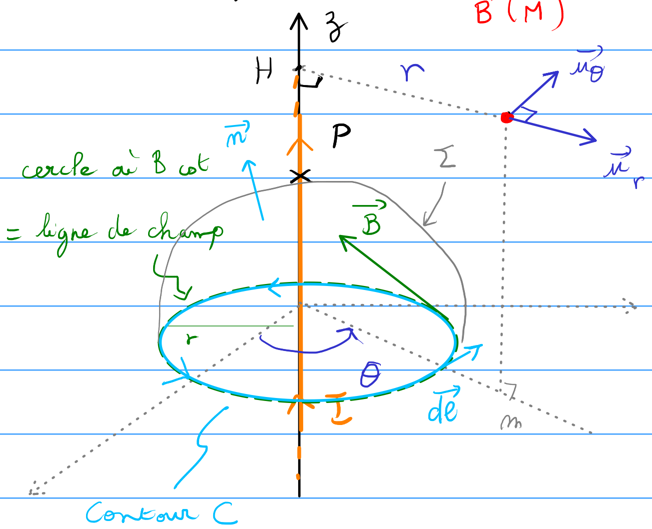
↳ contour C fermé « bien choisi » (ex : ligne de champ où B constant)

↳ C orienté ⇒ sens de $\vec{n}$ (règle du « tire-bouchon »)

↳ courants algébriques : + même sens que $\vec{n}$

− sens opposé à $\vec{n}$

cas du fil infini :



$\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$

contour C : cercle d'axe Oz et de rayon r où B est constant (ligne de champ ---)

Théorème d'Ampère :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 I_{enlacé}}$$

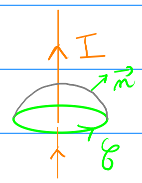
↳ $\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$, $B(r)$ constant à r fixé

↳ $\vec{d\ell} = d\ell_\theta\,\vec{u}_\theta = r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{B(r)}_{cst}\, \vec{u_\theta}\cdot r\, d\theta\, \vec{u_\theta} = r\, B(r) \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi\, r\, B(r)$$

$\vec{u_\theta}\cdot\vec{u_\theta} = 1$

donc $\quad 2\pi\, r\, B(r) = \mu_0\, I_{\text{enlacés}} = \mu_0\,(+I)$



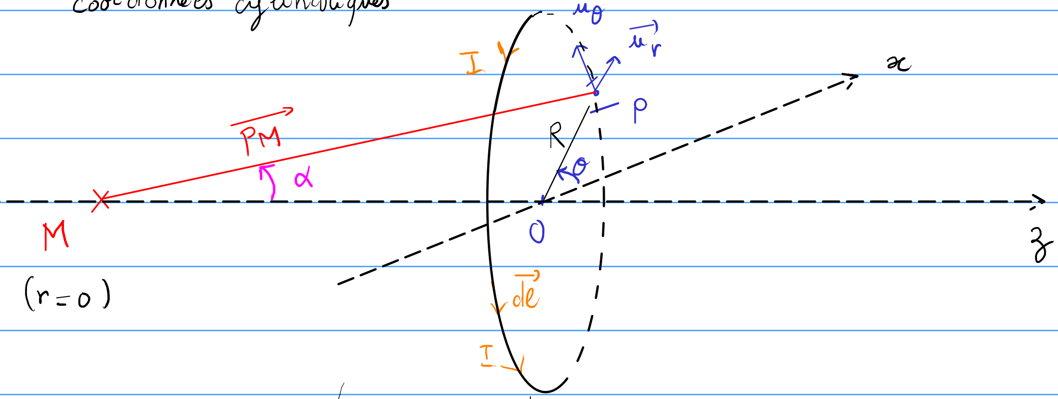
$$\boxed{\vec{B} = \left(\frac{\mu_0\, I}{2\pi\, r}\right)\vec{u_\theta}}$$

Exercice 3 – Spire

Calculer, par intégration en utilisant la *loi de Biot et Savart*, le champ magnétique $\vec{B}$ (direction, sens et module) créé en un point M de l'axe de révolution d'une spire de centre O et de rayon R parcourue par un courant d'intensité I constante.

coordonnées cylindriques

$\sin\alpha = \dfrac{R}{PM}$



Biot et Savart : $\quad \vec{dB} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left(\dfrac{I\,\vec{d\ell}\wedge\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}\right) \quad\longrightarrow\quad \vec{B} = \displaystyle\int_{\text{spire}} \vec{dB}$

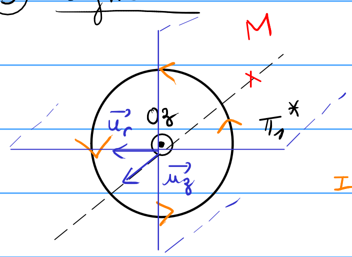
⓪ $\vec{B}$ continu et défini sauf sur la spire

① $\vec{B}(r,\theta,z)$

② • invariance par rotation de la distribution de courant : $\vec{B}$ indépendant de θ

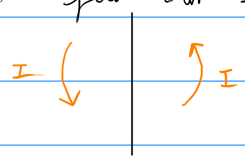
• M sur l'axe Oz : $r=0 \qquad \vec{B}(0,\cancel{\theta},z) = \vec{B}(z)$

③ Symétries :



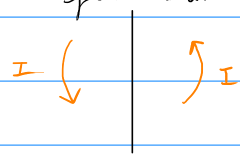
$\Pi_1^* = (M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$

plan d'antisymétrie



$\Pi_2^* = (M, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$

plan d'antisymétrie



$\vec{B} \in \Pi_1^*$ et $\Pi_1^* \implies \boxed{\vec{B} = B(z)\,\vec{u_z}}$

direction de I parcourant le cercle

- $$\vec B = \int_{spire} \vec{dB} = \int_{spire} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I\,\vec{d\ell}\wedge\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}\right)$$

$$\vec{d\ell} = d\ell_\theta\,\vec u_\theta = R\,d\theta\,\vec u_\theta$$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\,\vec u_r - z\,\vec u_z$$

$$\|\vec{PM}\|^2 = R^2 + z^2$$

$+$ $(\vec u_r, \vec u_\theta, \vec u_z)$ $(\vec u_r, \vec u_\theta, \vec u_z)$ $-$

$\vec u_\theta \wedge \vec u_r = -\vec u_z$

$\vec u_\theta \wedge \vec u_z = +\vec u_r$

$$\vec B = \int_{spire} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}}_{constant}\,\frac{I R\,d\theta\,\vec u_\theta \wedge \left(-R\vec u_r - z\vec u_z\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\left[\int_{\theta=0}^{2\pi} R\,d\theta\,\overset{constant}{\vec u_z} + \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi}(-z)\,d\theta\,\vec u_r(\theta)}_{=\vec 0\ \text{(vecteur s'annule 2 à 2)}}\right] = B(z)\,\vec u_z$$

$$\vec u_r = \cos\theta\,\vec u_x + \sin\theta\,\vec u_y$$

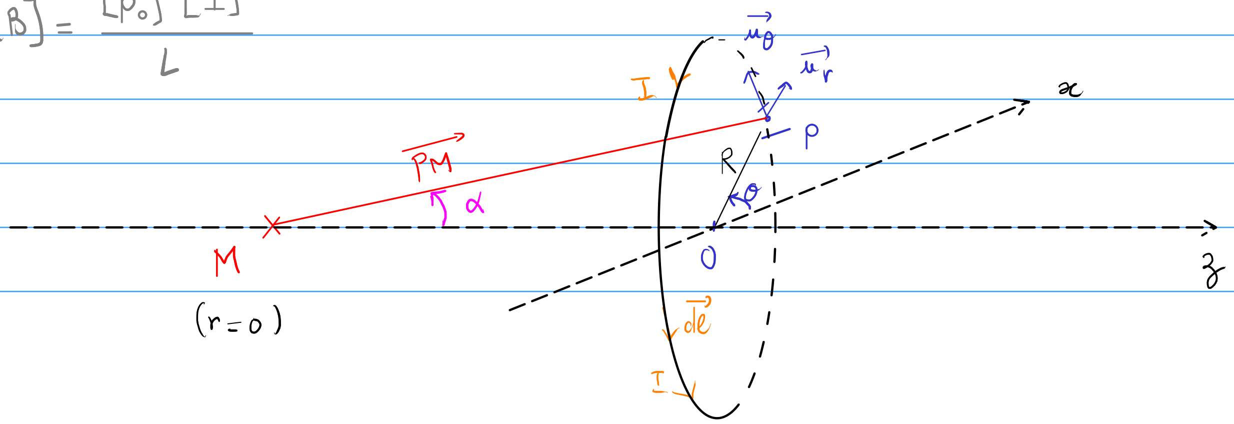
$$\int_0^{2\pi}\vec u_r\,d\theta = \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{[\sin\theta]_0^{2\pi} = 0}\Big)\vec u_x + \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta}_{-[\cos\theta]_0^{2\pi} = -(1-1) = 0}\Big)\vec u_y = \vec 0$$

$$\vec B = \frac{\mu_0 I R^2}{\cancel{4}\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\vec u_z = \boxed{\left(\frac{\mu_0 I}{2}\right)\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\,\vec u_z}$$

$$\sin\alpha = \frac{R}{\|\vec{PM}\|} = \frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} \Longrightarrow \sin^3\alpha = \frac{R^3}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

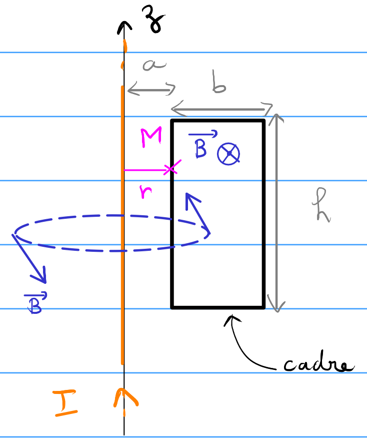
$\boxed{\vec B = \left(\dfrac{\mu_0 I}{2R}\right)\sin^3\alpha\,\vec u_z}$, en M sur l'axe de la spire.

$$[B] = \frac{[\mu_0]\,[I]}{L}$$



Exercice 2 – Calcul de flux du champ magnétique pour un fil

Déterminer l'expression du flux $\Phi(\vec{B})$ du champ magnétique $\vec{B}$ créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I, à travers un rectangle dont le plan contient le fil, de dimension h (parallèle au fil) et b (perpendiculaire au fil).
Le côté le plus proche du fil se trouvant à la distance a. ($a < b < h$)



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{d\ell} = \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{vmatrix} \qquad \vec{dS} = \begin{vmatrix} r\,d\theta\,dz = dS_r \\ dr\,dz = dS_\theta \\ r\,dr\,d\theta = dS_z \end{vmatrix}$$

Flux élementaire : $d\Phi = \vec{B}\cdot\vec{dS}$

$$d\Phi = B(r)\,\vec{u}_\theta\cdot\vec{dS} = B(r)\,dS_\theta = B(r)\,dr\,dz$$

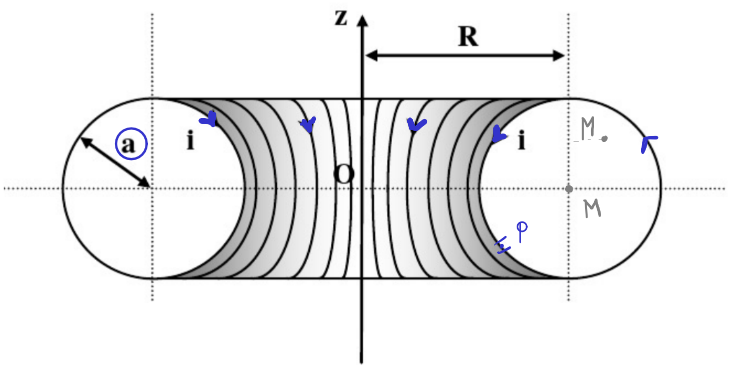
$$\Phi = \int_{r=a}^{a+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr\underbrace{\int_0^h dz}_{h} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

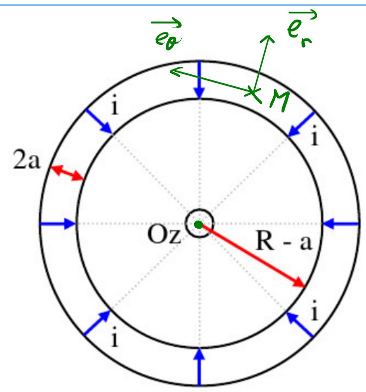
Détermination de champ magnétique

Exercice 4 – Tore circulaire

On veut étudier le champ magnétique créé par une distribution de courants présente sur un tore circulaire de rayon R à section circulaire de rayon a. On note O le centre du tore et (Oz) son axe de révolution. Une chambre à air gonflée, de vélo par exemple, constitue un tel tore.

La distribution de courants est constituée par un enroulement d'un grand nombre de N spires jointives circulaires de rayon a enroulées sur toute la surface du tore, le sens du courant étant donné sur la figure. On négligera l'épaisseur des fils.
Soit M un point quelconque de l'espace où l'on cherche le champ magnétique $\vec{B}$ créé par cette distribution.



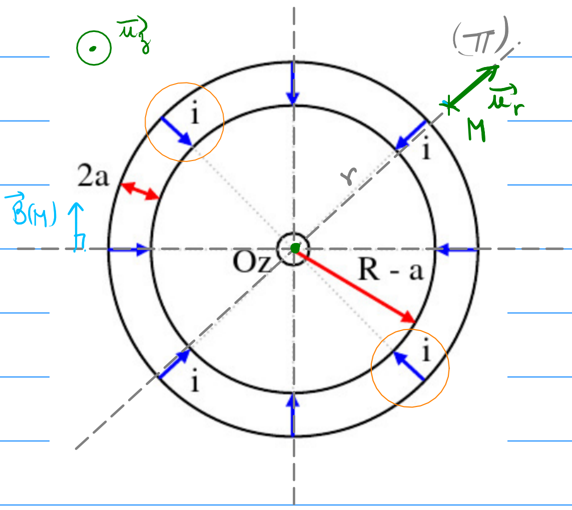


1/ Étude qualitative

a) Quel est le domaine de définition du champ magnétique ? Dans toute la suite, on considère que M appartient à ce domaine.

a) Le champ magnétique est défini et continu sur tout l'espace sauf sur les spires (où i)

b) Quelle est la direction de $\vec{B}$ en M ? Justifier la réponse.

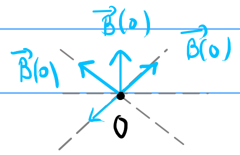


Tous les plans π passant par M et contenant l'axe (Oz) sont des plans de symétries :

$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) = \pi$

$\vec{B} \perp \pi \longrightarrow \vec{B} = B(r,\theta,z)\,\vec{u}_\theta$

c) Que vaut $\vec{B}$ au point O ? $\pi_0 = (O, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \longrightarrow \vec{B}(O) \perp \pi_0$ donc $\vec{B}(O) = \vec{0}$

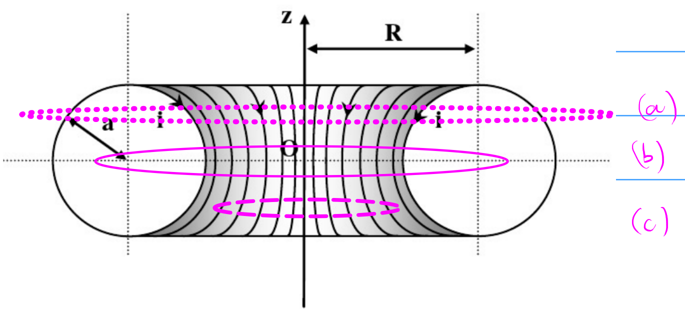


d) Justifier le choix du système de coordonnées cylindriques d'axe (O, z). De quelle(s) coordonnée(s) dépend le module $\| \vec{B} \|$ du champ ?

L'axe de révolution du tore est (Oz) donc on doit choisir les coordonnées cylindriques.

La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) donc $\|\vec{B}\|$ est indépendant de θ : $\vec{B} = B(r,z)\,\vec{u}_\theta$

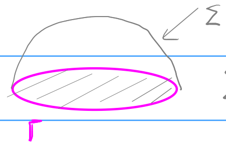
ligne de champ = cercle de centre sur l'axe (Oz) $\Longrightarrow$ $B(r,z)$ constant sur la ligne de champ à r, z fixés



2/ Montrer qu'en tout point situé à l'extérieur du tore, $\vec{B}$ est nul.

Théorème d'Ampère : Γ = ligne de champ fermée = cercle de rayon r, d'altitude z, centrée sur l'axe (Oz)

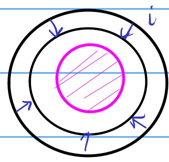
$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{alg}}$$



Σ = disque défini par Γ

$*$ à l'extérieur du tore : cas (a) et (c)

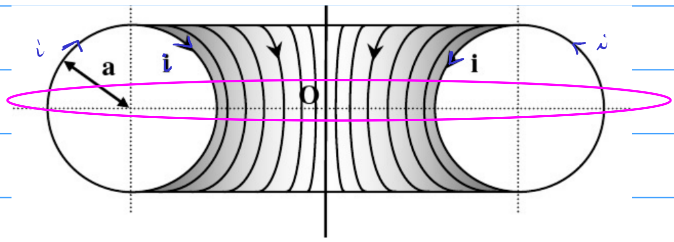
(c)



Le disque défini par le cercle n'est traversé par aucun courant : $\sum I_{alg} = 0$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

(a)



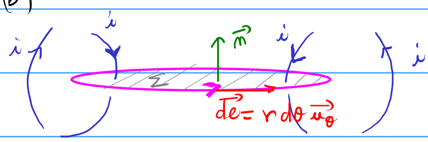
$\sum I_{alg} = (i - i) + (i - i) = 0$ il y a autant de courants entrants que de courants sortants : $\vec{B} = \vec{0}$

3/ Déterminer l'expression de $\vec{B}$ en un point quelconque de l'intérieur du tore.

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_\Gamma B(r,z)\,\vec{u}_\theta \cdot r\,d\theta\,\vec{u}_\theta = \underbrace{\int}_{\text{cercle}} \underbrace{B(r,z)}_{\text{constant à } r,z \text{ fixé}}\, r\, d\theta$$

$$= B(r,z)\, r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r\, B(r,z)$$

(b)



Le disque est coupé par les N spires avec un courant « descendant », dans le sens opposé à $\vec{n} = \vec{u}_z$ donc $\sum I_{alg} = N(-i)$

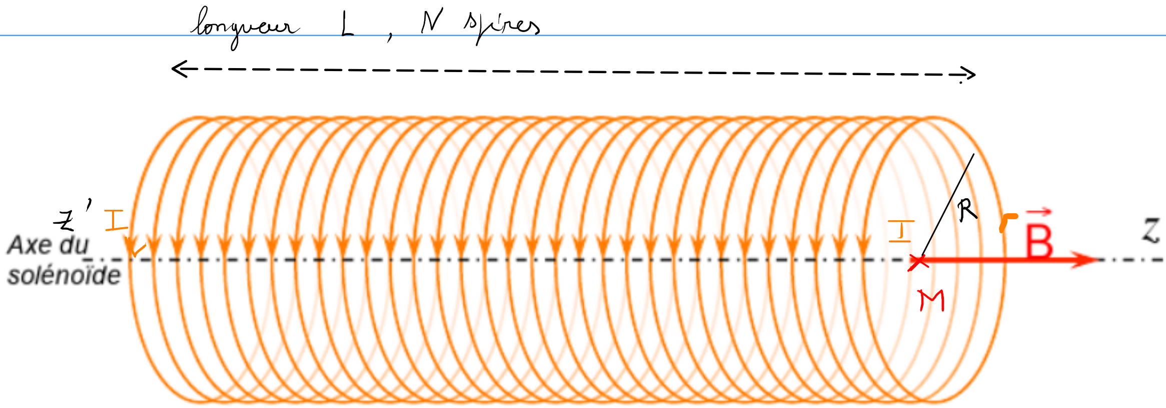
par rapport à $\vec{n}$

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = 2\pi r\, B(r,z) = \mu_0(-Ni) \Rightarrow B(r,z) = \frac{-\mu_0 N i}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{-\mu_0 N i}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta}$$

Exercice 5 – Solénoïde fini *

On considère un solénoïde (fini) de longueur L et comprenant N spires, chacune étant parcourue par un courant d'intensité I constante. Ces spires sont circulaires de rayon R et sont régulièrement enroulées sur un cylindre de révolution autour de l'axe $(z'z)$.



On cherche à déterminer complètement le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M quelconque de l'axe $(z'z)$. Le courant et l'axe $(z'z)$ sont orientés de manière directe (*règle du tire-bouchon*).

1/ Soit une longueur élémentaire dz de l'axe $(z'z)$ où se trouve le solénoïde. Quel nombre élémentaire dN de spires se trouvent entre la cote (z) et $(z + dz)$?

N spires $\longrightarrow$ longueur L

dN $\longrightarrow$ dz

$$N\,dz = dN\,L \Longrightarrow \boxed{dN = \left(\frac{N}{L}\right) dz}$$

2/ Calculer le champ élémentaire $d\vec{B}(M)$ créé au point Mpar ces dN spires ?

- pour une seule spire : M sur l'axe,

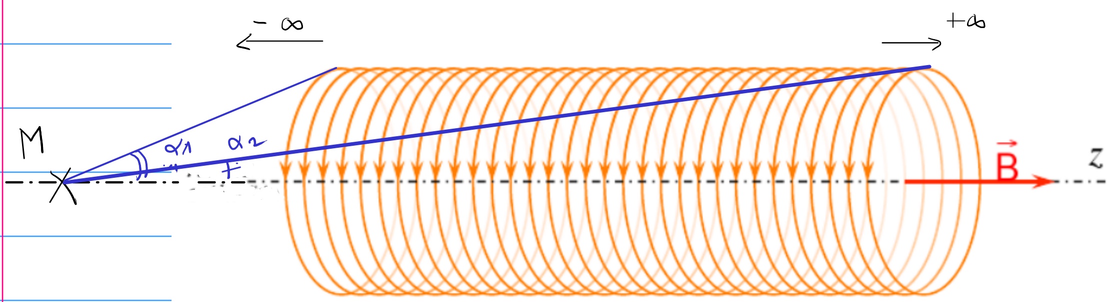
$$\boxed{\vec{B}_{1\,spire}(M) = \left(\frac{\mu_0 I}{2R}\right) \sin^3\alpha \; \vec{u}_z} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

α : demi-angle sous lequel depuis M on voit la spire

- pour dN spire, $dN = \frac{N}{L} dz$

$$d\vec{B}(M) = \vec{B}_{1\,spire}(M) \times dN = \left(\frac{\mu_0 I N}{2R\,L}\right) \sin^3\alpha \; dz \; \vec{u}_z$$

3/ En déduire la valeur $B(z)$ du champ magnétique au point $M(z)$. On fera apparaître les angles α_1 et α_2 sous lesquels on voit, du point M, la spire d'entrée et la spire de sortie du solénoïde.



vecteur constant

- $$\vec{B}(M) = \int_{\text{solénoïde}} \vec{dB}(M) = \int_{\text{solénoïde}} \left(\frac{\mu_0 I N}{2R \quad L}\right) \sin^3\alpha \, dz \, \vec{u_z}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I N}{2RL} \vec{u_z} \underbrace{\left(\int_{\text{solénoïde}} \sin^3\alpha \, dz\right)}_{K}$$

- $$K = \int \sin^3\alpha \, dz : \quad \tan\alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow z = \frac{R}{\tan\alpha} = R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$dz = d\left(R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = R\left(\frac{d\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{d\alpha}\right) d\alpha$$

$$= R\,d\alpha\left[\frac{-\sin\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right] = \frac{-R}{\sin^2\alpha} d\alpha$$

$$K = \int \sin^3\alpha \left(\frac{-R}{\sin^2\alpha}\right) d\alpha = -R\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, d\alpha = -R\left[-\cos\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$K = R\left(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right)$$

Sans dimension

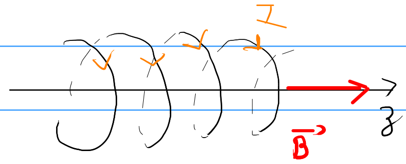
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I N}{\cancel{2}\cancel{R}L} \cancel{R}\left(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right)\vec{u_z} = \frac{\mu_0 I N}{2L}\left(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right)\vec{u_z}$$

$$[B] = \left[\frac{\mu_0 I}{L}\right] \quad \text{ok}$$

4/ Retrouver l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long, en utilisant le résultat précédent.

<u>solénoïde infini :</u> $\alpha_1 \longrightarrow \pi$, $\alpha_2 \longrightarrow 0$ $\Longrightarrow \cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1) = 1 - (-1) = 2$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 I \left(\frac{N}{L}\right) \vec{u_z} = +\mu_0 \, n I \, \vec{u_z}}$$



$n = \frac{N}{L}$: nombre de spires par unité de longueur (spires/m)