E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
2^e **Année Classe Préparatoire**

T.D. MATHEMATIQUES CPI. II

T.D. n° 5 **(Suites et Séries de Fonctions)**
le 03 décembre 2019

Ex.1 Etudier la convergence simple, absolue, normale, et la convergence uniforme des séries de fonctions $\sum f_n$:

a)

$$\begin{aligned} f_n :\ \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f_n(x) = \frac{1}{n^2}[x^n + (1-x)^n], \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_n :\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f_n(x) = x \exp(-nx^2), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f_n :\ \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f_n(x) = nx^2 \exp(-x\sqrt{n}), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f_n :\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f_n(x) = \frac{1}{n^x}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f_n :\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x},, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Ex.2 Soit α un réel tel que $\alpha < 2$.
On définit la série de fonctions $\sum f_n$ par :

$$\begin{aligned} f_n :\ \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f_n(x) = x^{2-\alpha} \exp(-nx), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, si $\alpha < 1$
3) Que peut-on dire si $\alpha = 1$

Ex.3 On définit la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_n :\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

1) Etudier la convergence simple , absolue, normale et uniforme de la série $\sum f_n$.
2) Calculer la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Ex.4

a) Etudier la convergence simple , absolue, normale et uniforme de la série $\sum f_n$ avec :

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x)}, \quad n \geq 1$$

.

b) On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. S est-elle dérivable en 0 à droite ?

Ex.5

a) Etudier la convergence simple , absolue, normale et uniforme de la série $\sum f_n$ avec :

$$f_n :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}, \quad n \geq 0 .$$

b) On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Donner le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision $\frac{1}{x}$, lorsque $x \to +\infty$. On utilisera :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -ln2$$

Ex.6

a) Etudier la convergence simple , absolue, normale et uniforme de la série $\sum f_n$ avec :

$$f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, \quad n \geq 1 .$$

b) On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que S est continue sur $[a, +\infty[$, avec $a > 1$.

c) Montrer que :

$$S(x) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad x \to 1^+$$