Corrigé TD5: Matrices

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, les produits AB et BA existent-ils ? Si oui, les calculer

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Correction.

1. $AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
2. il n'existe pas AB, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. il n'existe pas AB, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
4. $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\square$

Exercice 2

On consid'ere les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $AB, BA, (A-B)^2$et $A^2 - 2AB + B^2$. Que remarque-t-on?

Correction.

- $AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$
- $(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$A^2 - 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$AB \neq BA$ donc on ne peut pas utiliser l'identité remarquable pour les matrices $\square$

Exercice 3

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^tA. La matrice A est-e-elle inversile? si oui, quel est son inverse?

Correction. $A^tA = A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$ Donc A inversible et $A^{-1} = \frac{1}{9}A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En deduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X) = X^2 - 3X + 2$.
3. Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On vérifie sans difficultés que $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$. Alors $A(A - 3I_2) = -2I_2$. Alors
$$A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
2. Compte tenu de $\deg(P) = 2$, la division euclidienne de X^n par $P(X) = X^2 - 3X + 2$ s'écrit sous la forme :
$$X^n = (A^2 - 3X + 2)Q_n(X) + (a_nX + b_n)$$
En remarquant que 1 et 2 sont les racines de P, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} 1^n & = & a_n(1) + b_n \\ 2^n & = & a_n(2) + b_n \end{array} \right.$.
D'où immédiatement, par addition et soustraction de lignes : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & 2^n - 1 \\ b_n & = & 2 - 2^n \end{array} \right.$.
On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, X^n = (X^2 - 3x + 2)Q_n(X) + (2^n - 1)X + (2 - X^n)$.
3. En appliquant la relation précédente à $X = A$, puis en utilisant le résultat du 1, on obtient que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (A^2 - 3A + 2I_2)Q_n(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2 = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$$
Soit aussi :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que l'on peut écrire $A = 3I_3 + N$ où N est une matrice à déterminer.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^p pour $p \geq 3$.
3. En déduire A^p pour tout $p \geq 1$.
4. Application. Soit $(x_n), (y_n)$ et (z_n) trois suites réelles telles que

$$x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 7$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases}$$

Soit $X_n = (x_n, y_n, z_n)^t$

(a) Trouver une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.
(b) En déduire que $X_n = M^n X_0$.
(c) Calculer M^n.
(d) En déduire les expressions de x_n, y_n, z_n en fonction de n.

Correction. 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3I_3 + N$

2. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $N^p = \mathbf{0}$ pour tout $p \geq 3$.

3. Remarquons $I_3N = NI_3$ donc

$$A^p = (3I_3 + N)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} (3I_3)^{p-k} N^k = 3^p I_3 + p3^{p-1}N + \frac{p(p-1)}{2} 3^{p-2} N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 3^p & 0 & 0 \\ 0 & 3^p & 0 \\ 0 & 03^p & \end{pmatrix} + p3^{p-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p(p-1)}{2} 3^{p-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3^p & p.3^{p-1} & 3^{p-2}(p^2 - p) \\ 0 & 3^p & 2p.3^{p-1} \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix}$$

4. (a) $M = A$
(b) Par récurrence
(c) $M^n = A^n$

(d) $X_n = A^n X_0$ donc

$$\left\{\begin{array}{l} x_n = 3^n + 2n3^{n-1} + 7(n^2-n)3^{n-2} \\ y_n = 2.3^n + 14n3^{n-1} \\ z_n = 7.3^n \end{array}\right.$$

$\square$