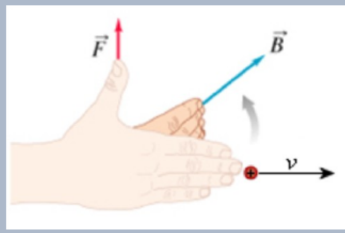
TD5 : force de Lorentz

$$\boxed{\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

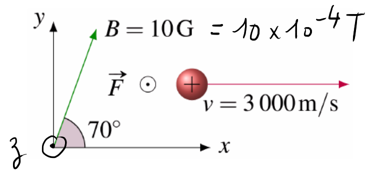
avec

$\vec{f}$	force de Lorentz en Newton [N]
q	charge en Coulomb [C]
$\vec{B}$	champ magnétique en Tesla [T]
$\vec{v}$	vitesse [m.s^{-1}]



Ex 1. Force magnétique sur une charge en mouvement

a) Un proton se déplace vers la droite à 3000 m/s dans un champ de 10 G orienté dans la direction indiquée sur la figure. Quelle est la force sur ce proton ?



proton : $q = |e| = 1,602 \times 10^{-19}$ C

unité de $\vec{B}$:
Tesla (T)
$1T = 10^4 G$
$1G = 10^{-4} T$

La force sur le proton vaut : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, sa norme est de :

$$\|\vec{F}\| = F = \|q\vec{v}\wedge\vec{B}\| = |q|\,\|\vec{v}\|\,\|\vec{B}\|\,|\sin(\vec{v},\vec{B})|$$

A.N : $F = 1,602 \times 10^{-19} \times 3000 \times (10 \times 10^{-4}) \sin(70°)$
$= 4,516 \times 10^{-19}$ N

$$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = q \begin{vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B\cos 70 \\ B\sin 70 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ qvB\sin(70°) \end{vmatrix}$$

Lorentz : seulement $\vec{B}$

$q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

Laplace : $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$q(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$

b) Une charge de 1μC se déplace dans une région où le champ magnétique est uniforme. Elle ne subit pas de force quand elle se dirige avec une vitesse de 5 m/s dans la direction de l'axe des x positifs. Elle subit cependant une force de 10^{-7} N dans la direction de l'axe des z positifs quand elle a une vitesse de $\vec{v} = (3\,\vec{i} + 4\,\vec{j})$ m/s. Quel est le champ magnétique ?

- $q = 1\,\mu C = 10^{-6}\ C$
- $\vec{v} = v_x\,\vec{i} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$ $\qquad v_x = 5\ m/s$
- $\vec{v} = (3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}) \Rightarrow \vec{F} = F_z\,\vec{k}$ $\qquad F_z = 10^{-7}\ N$

or $\hookrightarrow$ $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ $\qquad \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{B}$

$\vec{v} = v_x\,\vec{i}$

donc $\vec{B} = B_x\,\vec{i}$

$\hookrightarrow$ $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -4B_x \end{vmatrix}$

$\vec{F} = -4\,q\,B_x\,\vec{k} \Rightarrow B_x = \dfrac{F}{-4q} = \dfrac{-10^{-7}}{4 \times 10^{-6}} = -0{,}25 \times 10^{-1}\ T$

$\boxed{\vec{B} = B_x\,\vec{i} \qquad B_x = -0{,}025\,T}$

Ex 2. Spectromètre de masse

On envoie un atome de krypton ionisé 1 fois avec une vitesse de 40000 m/s dans un spectromètre de masse où il y a un champ magnétique de $0,6$ T. L'atome frappe la plaque à une distance de $11,044$ cm du point d'entrée de l'atome.

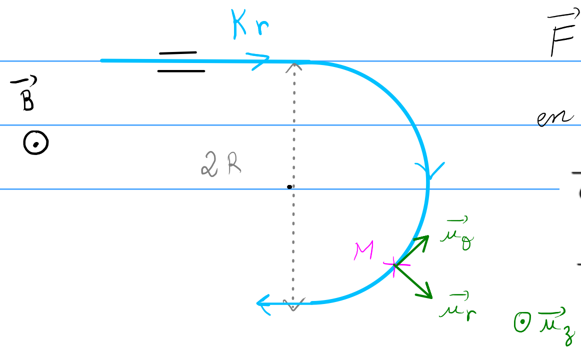
a) Quelle est la masse de l'atome ?

b) De quel isotope de l'atome pourrait-il s'agir ?

$|q| = e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ C$ $\qquad 2R = 11{,}044\,cm$

$B = 0{,}6\,T$ $\qquad v = 4 \times 10^{4}\ m/s$

a)



$\vec{F} = m\,\vec{a} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

en coord. polaires :

$$\vec{a}\,(t) = -R\,(\dot\theta)^2\,\vec{u_r} + R\,\ddot\theta\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a}\,(t) = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r} + R\,\ddot\theta\,\vec{u_\theta}. \ ; \quad \vec{v} = R\,\dot\theta\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q\, R\dot{\theta}\, \vec{u}_\theta \wedge B\, \vec{u}_z = q\, \overbrace{R\dot{\theta}}^{v} B\, \vec{u}_r = m \overbrace{\left(-\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta\right)}^{\vec{a}}$$

donc $|q|\,|v|\,B = m\dfrac{v^2}{R} \Rightarrow |q|\,R\,B = m\,|v|$

$$\hookrightarrow m = \frac{|q|\,R\,B}{v} = \frac{1{,}602\times10^{-19}\times\left(\frac{1}{2}\times 11{,}044\times10^{-2}\right)\ 0{,}6}{4\times10^{4}}$$

$$m = 1{,}327\times10^{-25}\ \mathrm{kg} = 79{,}62\ u \qquad \left(\mathcal{N}_A = 6\times10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}\right)$$

b) isotope 80 du Krypton

Ex 3. Force de Lorentz

Un proton ($q = 1.6010^{19}$ C, $m = 1.67\ 10^{27}$ kg) se trouve dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0.5$ T. On appelle x l'axe qui pointe dans la direction de ce champ.

À $t = 0$, le proton a une vitesse $\vec{v}$, avec $v_x = 1.5\ 10^5$ m/s, $v_y = 0$ m/s, $v_z = 2.0\ 10^5$ m/s et on est au point $(0, 0, 0)$.

• $\vec{B} = B\,\vec{e}_x$, à $t=0$: $\vec{v} = v_x^0\,\vec{e}_x + \underbrace{0}_{= v_y^0 = 0}\,\vec{e}_y + v_z^0\,\vec{e}_z$ et $\vec{OM} = (0,0,0)$

$v_x^0 = v_x(t=0)$ et $v_z^0 = v_z(t=0)$

a) Écrire la deuxième loi de Newton pour le proton à $t = 0$

$$m\vec{a} = \vec{F}_B = q\vec{v}\wedge\vec{B} = q \begin{vmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \\ v_x \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} 0 \\ v_z B \\ 0 \end{vmatrix}$$

$m\vec{a} = q\,v_z B\,\vec{e}_y \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dfrac{q v_z B}{m}\vec{e}_y} = \dot{\vec{v}}$

$\dot{v}_x = 0$, $\dot{v}_y = \dfrac{q v_z B}{m}$, $\dot{v}_z = 0$ à $t = 0$

À $t > 0$, le proton a désormais une vitesse $\vec{v}$ à 3 composantes non nulles. $\vec{B}$ est toujours uniforme, constant orienté suivant x.

b) Écrire les équations différentiels du premier ordre pour v_x, v_y et v_z.

$t > 0$: $$m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = q \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_x \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} 0 \\ v_z B \\ -v_y B \end{vmatrix}$$

$$m \begin{vmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} 0 \\ v_z B \\ -v_y B \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{v}_x &= 0 \\ \dot{v}_y &= \frac{qB}{m} v_z \\ \dot{v}_z &= -\frac{qB}{m} v_y \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \\ &(3) \end{aligned}$$

c) En notant $\vec{\Omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$, établir les deux équations différentiels du second ordre pour v_y et v_z.

(1) $v_x(t) = \text{constante} = v_x^0 \Rightarrow \underline{x(t)} = v_x^0\, t + x(t=0) = \underline{v_x^0\, t}$

$$\Omega^2 = \vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega} = \left(\frac{qB}{m}\right)^2$$

$(2) + (3)$: $\underline{\ddot{v}_y} = \left(\frac{qB}{m}\right) \dot{v}_z \overset{(2)}{=} \left(\frac{qB}{m}\right)\left(-\frac{qB}{m} v_y\right) = \underline{-\Omega^2 v_y}$

$\underline{\ddot{v}_z} = \underline{-\Omega^2 v_z}$, $\ddot{v} + \Omega^2 v = 0$ $\quad r^2 + \Omega^2 = 0$

solution : $\boxed{\begin{aligned} &v(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \\ &A = v(t=0) \quad \text{et} \quad B = \dot{v}(t=0)/\Omega \end{aligned}}$

- v_y : $v_y(t=0) = 0 \qquad \dot{v}_y(t=0) \overset{(2)}{=} \Omega v_z^0$; $\Omega = \|\vec{\Omega}\| = \frac{qB}{m}$

$$\underline{v_y} = \frac{\dot{v}_y(t=0)}{\Omega}\sin(\Omega t) = \underline{v_z^0}\ \underline{\sin(\Omega t)}$$

- v_z : $v_z(t=0) = v_z^0 \qquad \dot{v}_z(t=0) \overset{(3)}{=} -\Omega\, v_y(t=0) = 0$

$$\underline{v_z = v_z^0 \cos(\Omega t)}$$

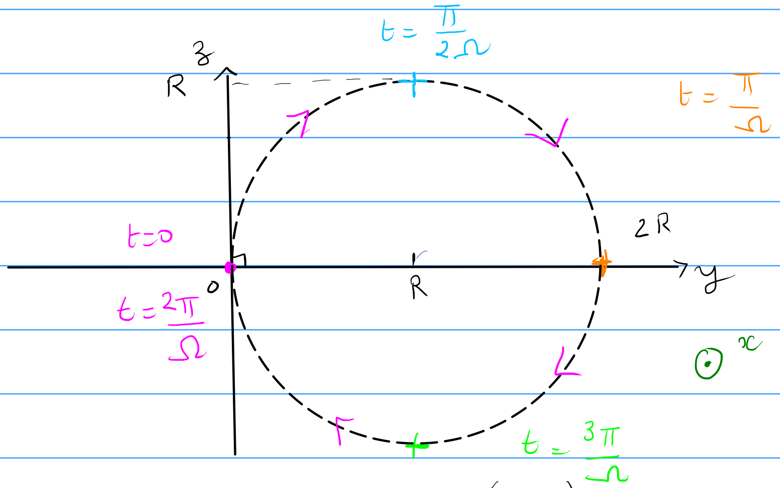
d) Montrer que la trajectoire du proton est une hélice qui a pour axe la droite parallèle à x d'équation $(z = 0; y = R)$, pour rayon $R = \frac{v_z(t=0)}{\Omega}$ et de pas $v_x(t=0)\frac{2\pi}{\Omega}$.

- $x(t) = v_x^0\, t$ $\quad$ <u>mvt rectiligne selon x</u>

- $v_y(t) = v_z^0 \sin(\Omega t)$
- $v_z(t) = v_z^0 \cos(\Omega t)$

$$\begin{cases} y(t) = -\dfrac{v_z^0}{\Omega} \cos(\Omega t) + \text{constante} \\ z(t) = \dfrac{v_z^0}{\Omega} \sin(\Omega t) + \text{constante} \end{cases}$$

à $t=0$ $y = z = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y(t) = \underbrace{\dfrac{v_z^0}{\Omega}}_{R} (1 - \cos(\Omega t)) \\ z(t) = \underbrace{\dfrac{v_z^0}{\Omega}}_{R} \sin(\Omega t) \end{cases}$



plan (Oyz) : trajectoire circulaire de centre $(R, 0)$ et de rayon R.

pas : $x\left(t = \frac{2\pi}{\Omega}\right) = v_x^0 \times \frac{2\pi}{\Omega}$

$\Rightarrow$ hélice d'axe la droite parallèle à x d'équation $(y = R, z = 0)$, de rayon $R = \dfrac{v_z^0}{\Omega}$ et de pas $v_x^0 \dfrac{2\pi}{\Omega}$.