CY Tech

TD Algèbre

Nombres complexes.

Exercice 5.1

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

(1) $\frac{3+6i}{3-4i}$.

(2) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$.

(3) $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 5.1

Solution : On commence par noter que, puisque pour tout

$$z = x + iy \in \mathbb{C}^\times,$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} &= \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \end{aligned}$$

Pour écrire sous forme algébrique un nombre complexe de la forme $\frac{a+ib}{x+iy}$ on procède toujours de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{a+ib}{x+iy} &= \frac{a+ib}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} \\ &= \frac{(a+ib)(x-iy)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{(ax+by)+i(bx-ay)}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Exercice 5.1

(1) Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{3+6i}{3-4i} &= \frac{3+6i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}\\ &= \frac{(3+6i)\cdot(3+4i)}{9+16}\\ &= \frac{-15+30i}{25} = \frac{-3+i6}{5}.\end{aligned}$$

(2) Nous avons :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} &= \frac{1+2i+i^2}{4-4i+i^2} + \frac{3+6i}{3-4i}\\ &= \frac{2i}{3-4i} + \frac{3+6i}{3-4i}\\ &= \frac{3+8i}{3-4i}\end{aligned}$$

Exercice 5.1

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} &= \frac{3+8i}{3-4i} \\
&= \frac{3+8i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(3+8i)(3+4i)}{25} \\
&= \frac{-23+36i}{25}.
\end{aligned}$$

(3) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} &= \frac{2+5i}{1-i} + \frac{\overline{(2+5i)}}{\overline{(1-i)}} \\
&= \frac{2+5i}{1-i} + \overline{\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)} \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 5.1

Or

$$\begin{aligned}\frac{2+5i}{1-i} &= \frac{2+5i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\\ &= \frac{(2+5i)\cdot(1+i)}{2}\\ &= \frac{-3+7i}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i} &= 2\mathrm{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)\\ &= 2\cdot\frac{-3}{2} = -3.\end{aligned}$$

Exercice 5.2

On suppose $\theta \in]-\pi;\pi]$. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

(1) $z = ie^{i\theta}$.

(2) $z = 1 + e^{i\theta}$.

(3) $z = \sin(\theta) + i(1 + \cos(\theta))$.

Exercice 5.2

(1) $z = ie^{i\theta}$.

Solution : Notons que

$$\begin{array}{rcl} i & = & 0 + i \\ & = & \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) \\ & = & e^{\frac{i\pi}{2}}. \end{array}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{array}{rcl} ie^{i\theta} & = & e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\theta} \\ & = & e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}. \end{array}$$

Donc

$$|z| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \theta.$$

Exercice 5.2

(2) $z = 1 + e^{i\theta}$.

Solution : Notons que

$$1 = e^{i0}.$$

Alors

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta}.$$

À chaque fois que on a une expression de la forme

$$e^{ix} + e^{iy},$$

on pense à utiliser la **formule de l'angle moitie** :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{\frac{i(x+y)}{2}}.$$

Donc

$$z = e^{i0} + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Exercice 5.2

Pour finir, on rappelle que

$$\theta \in \left]-\pi, \pi\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

et comme cosinus est positif sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on conclut

$$|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\theta}{2}.$$

Exercice 5.2

(3) $z = \sin(\theta) + i(1 + \cos(\theta))$.

Solution : On commence par noter que

$$\begin{aligned} z &= \sin(\theta) + i(1+\cos(\theta)) \\ &= i + (\sin(\theta) + i\cos(\theta)) \\ &= i + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \; + \; e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}\left(1 + e^{-i\theta}\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}\left(e^{i0} + e^{-i\theta}\right). \end{aligned}$$

En utilisant la **formule de l'angle moitie**, on obtient

$$\begin{aligned} z = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{0-(-\theta)}{2}\right) e^{\frac{i(0+(-\theta))}{2}} &= e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{i\theta}{2}} \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i(\pi-\theta)}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 5.2

Pour finir, on rappelle que

$$\theta \in \left]-\pi, \pi\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

et comme cosinus est positif sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on conclut

$$|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Exercice 5.3

Calculer le module et l'argument principal des nombres complexes suivants

(1) $z = i(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$

(2) $z = \frac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i}$

Exercice 5.3

(1) $z = i(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} z &= i(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i) \\ &= (-i - \sqrt{3})(\sqrt{3} - i) \\ &= -i\sqrt{3} - 1 - 3 + i\sqrt{3} \\ &= -4 \\ &= 4 \cdot (-1). \end{aligned}$$

Finalement, puisque

$$\begin{aligned} -1 &= -1 + i0 \\ &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) = e^{i\pi}, \end{aligned}$$

on conclut que

$$-4 = 4e^{i\pi}.$$

Donc

$$|z| = 4 \quad \text{et} \quad \arg(z) = \pi \in \,]-\pi, \pi].$$

Exercice 5.3

(2) $z = \frac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i}$.

Solution : On commence par noter que

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+i &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}-3\sqrt{3}-3i &= -3(\sqrt{3}+i)\\ &= -6e^{i\frac{\pi}{6}}.\end{aligned}$$

Exercice 5.3

De même

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i} = \frac{-6e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} &= \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\left(-e^{i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\left(-e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) \\ &= \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\left(e^{i\pi}\cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) \\ &= \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{11\pi}{12}}. \end{aligned}$$

Exercice 5.3

Donc

$$|z| = \frac{6}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{11\pi}{12} \in \,]-\pi, \pi].$$

Exercice 5.4

Simplifier les nombres complexes

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{1995} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}-i}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= e^{-i\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Exercice 5.4

Ainsi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{1995} &= \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{1995}\\ &= e^{-i\frac{1995\pi}{6}}\\ &= e^{-i\frac{665\pi}{2}}\\ &= e^{-i166\cdot 2\pi - i\frac{\pi}{2}}\\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ &= -i.\end{aligned}$$

Exercice 5.4

Pour simplifier $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ on commence par noter que

$$\begin{aligned}
1+i\sqrt{3} &= 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= 2e^{i\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
1-i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right). \\
&= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

Exercice 5.4

Donc

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{20} &= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{20} \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{4}}\right)^{20} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{20} \cdot \left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} \\
&= (\sqrt{2})^{20} \cdot e^{i\frac{20\cdot 7\pi}{12}} \\
&= 2^{10} \cdot e^{i\frac{35\pi}{3}} \\
&= 2^{10} \cdot e^{i\frac{(36-1)\pi}{3}} \\
&= 2^{10} \cdot e^{i12\pi - i\frac{\pi}{3}} \\
&= 2^{10} \cdot e^{i12\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
&= 2^{10} \cdot e^{i6\cdot 2\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
&= 2^{10} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

Exercice 5.5

Montrer que

$$|z| = 1 \iff \overline{z} = \frac{1}{z}$$

Solution : Nous avons

$$|z| = 1 \quad \iff \quad \sqrt{z \cdot \overline{z}} = 1 \quad \iff \quad z\overline{z} = 1 \quad \iff \quad \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

Exercice 5.6

Soit

$$P = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\} \quad \text{et} \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Montrer que

$$f : z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

est une bijection de P sur D.

Solution :

- **Montrons f injective :** Soit $z \in P$ et $z' \in P$ tel que

$$\begin{aligned} f(z) = f(z') &\iff \frac{z-i}{z+i} = \frac{z'-i}{z'+i} \\ &\iff (z-i)(z'+i) = (z'-i)(z+i) \\ &\iff z \cdot z' + iz - iz' + 1 = z' \cdot z + iz' - iz + 1 \\ &\iff 2iz = 2iz' \\ &\iff z = z'. \end{aligned}$$

Ainsi, f est injective.

Exercice 5.6

- **Montrons f surjective :** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ (i.e $z \in D$). Cherchons $w \in P$ tel que $f(w) = z$. Nous avons

$$\begin{aligned} f(w) = z \quad &\iff \quad \frac{w-i}{w+i} = z \\ &\iff \quad w - i = wz + iz \\ &\iff \quad w - wz = i + iz \\ &\iff \quad w(1-z) = i + iz \\ &\iff \quad w = \frac{i+iz}{1-z} = i\frac{1+z}{1-z}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, l'unique antécédent de $z \in D$ est donné par

$$w = i \cdot \frac{1+z}{1-z}.$$

Pour montrer que f est surjective, il ne nous reste donc que à vérifier que $w \in P$. C'est-à-dire vérifier

$$\forall z \in D,\ \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}\left(i \cdot \frac{1+z}{1-z}\right) > 0.$$

Exercice 5.6

Or pour tout $z \in D$, nous avons

$$\begin{aligned}
i \cdot \frac{1+z}{1-z} &= i \cdot \frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} \\
&= i \cdot \frac{(1+z-\overline{z}-|z|^2)}{|1-z|^2} \\
&= i \cdot \frac{(1-|z|^2) + 2i\mathrm{Im}(z))}{|1-z|^2} \\
&= -\frac{2\mathrm{Im}(z)}{|1-z|^2} + i\frac{(1-|z|^2)}{|1-z|^2}.
\end{aligned}$$

Finalement, puisque $z \in D$, c'est-à-dire $|z| < 1$, on conclut $1 - |z|^2 > 0$ et donc

$$\mathrm{Im}\left(i \cdot \frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1-|z|^2)}{|1-z|^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad w = i \cdot \frac{1+z}{1-z} \in P.$$

La fonction f est donc surjective.

Exercice 5.7

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ posons

$$Z = \frac{z+i}{z-2i}.$$

(1) Déterminer l'ensemble (E_1) des nombres z tels que Z soit réel.

(2) Déterminer l'ensemble (E_2) des nombres z tels que Z soit imaginaire pur.

(3) Déterminer l'ensemble (E_3) des nombres z tels que Z ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5.7

(1) Déterminer l'ensemble (E_1) des nombres z tels que $Z = \frac{z+i}{z-2i}$ soit réel.

Solution : Nous avons

$$
\begin{aligned}
z \in E_1 \Longleftrightarrow Z \in \mathbb{R} \quad &\Longleftrightarrow \quad Z = \overline{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{z+i}{z-2i} = \overline{\left(\frac{z+i}{z-2i}\right)} = \frac{\overline{(z+i)}}{\overline{(z-2i)}} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+2i} \\
&\Longleftrightarrow \quad (z+i)(\overline{z}+2i) = (\overline{z}-i)(z-2i) \\
&\Longleftrightarrow \quad |z|^2 + 2iz + i\overline{z} - 2 = |z|^2 - 2i\overline{z} - iz - 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2iz + i\overline{z} = -2i\overline{z} - iz \\
&\Longleftrightarrow \quad 3iz = -3i\overline{z} \\
&\Longleftrightarrow \quad z = -\overline{z} \\
&\Longleftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R} \setminus \{2i\}.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} : z \in i\mathbb{R}\}.$$

Exercice 5.7

(2) Déterminer l'ensemble (E_2) des nombres z tels que $Z = \frac{z+i}{z-2i}$ soit un imaginaire pur.

Solution : Nous avons

$$
\begin{aligned}
z = x + iy \in E_2 &\iff Z \in i\mathbb{R} \\
&\iff Z = -\overline{Z} \\
&\iff \frac{z+i}{z-2i} = -\overline{\left(\frac{z+i}{z-2i}\right)} = -\frac{\overline{(z+i)}}{\overline{(z-2i)}} = -\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+2i} \\
&\iff -(z+i)(\overline{z}+2i) = (\overline{z}-i)(z-2i) \\
&\iff -|z|^2 - 2iz - i\overline{z} + 2 = |z|^2 - 2i\overline{z} - iz - 2 \\
&\iff 0 = 2|z|^2 + i(z-\overline{z}) - 4 \\
&\iff 0 = 2|z|^2 + i(2i\mathrm{Im}(z)) - 4 \\
&\iff 0 = 2|z|^2 - 2\mathrm{Im}(z) - 4 \iff 0 = |z|^2 - \mathrm{Im}(z) - 2 \\
&\iff 0 = x^2 + y^2 - y - 2 = x^2 + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 2 \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$E_2 = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} : x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} \right\}.$$

L'ensemble E_2 peut donc être identifié, avec le cercle de centre $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{3}{2}$, privé du point $2i$.

(3) Déterminer l'ensemble (E_3) des nombres z tels que Z ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Solution : On commence par noter que :

$$\arg(Z) = \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad Z \in i\mathbb{R} \;\text{ et }\; \mathrm{Im}(Z) > 0.$$

Par conséquent

$$z \in E_3 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in E_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(Z) > 0.$$

Maintenant

$$Z = \frac{z+i}{z-2i} = \frac{(z+i)(\overline{z}+2i)}{|z-2i|^2} = \frac{|z|^2 - 2 - \mathrm{Im}(z) + 3i\mathrm{Re}(z)}{|z-2i|^2}$$

Donc

$$\mathrm{Im}(Z) = \frac{3\mathrm{Re}(z)}{|z-2i|^2} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Exercice 5.7

Ainsi

$$z \in E_3 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in E_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

L'ensemble corresponds donc au cercle précédent restreint aux points d'abscisses strictement positives.

Exercice 5.8

Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ tel que $z \cdot z' \neq -1$. Démontrer par deux méthodes que

$$Z = \frac{z + z'}{1 + z \cdot z'} \in \mathbb{R}.$$

Première Méthode : Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$, alors

$$\begin{aligned} Z = \frac{z + z'}{1 + z \cdot z'} \in \mathbb{R} \quad &\iff \quad Z = \overline{Z} \\ &\iff \quad Z - \overline{Z} = 0. \end{aligned}$$

Montrons pour toute couple $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ avec $z \cdot z' \neq -1$, l'equation $Z - \overline{Z} = 0$.

Exercice 5.8

Nous avons

$$
\begin{aligned}
Z - \overline{Z} &= \frac{z+z'}{1+z\cdot z'} - \overline{\left(\frac{z+z'}{1+z\cdot z'}\right)} = \frac{z+z'}{1+z\cdot z'} - \frac{\overline{(z+z')}}{\overline{(1+z\cdot z')}} \\
&= \frac{z+z'}{1+z\cdot z'} - \frac{\overline{z}+\overline{z}'}{1+\overline{z}\cdot\overline{z}'} \\
&= \frac{(z+z')(1+\overline{z}\cdot\overline{z}') - (\overline{z}+\overline{z}')(1+z\cdot z')}{(1+z\cdot z')(1+\overline{z}\cdot\overline{z}')} \\
&= \frac{z + z\overline{z}\cdot\overline{z}' + z' + z'\overline{z}\cdot\overline{z}' - \overline{z} - \overline{z}' - \overline{z}zz' - \overline{z}'zz'}{(1+z\cdot z')(1+\overline{z}\cdot\overline{z}')} \\
&= \frac{z + \overline{z}'|z|^2 + z' + \overline{z}|z'|^2 - \overline{z} - \overline{z}' - z'|z|^2 - z|z'|^2}{(1+z\cdot z')(1+\overline{z}\cdot\overline{z}')} \\
{\color{red}(|z| = |z'| = 1)} &= \frac{z + \overline{z}' + z' + \overline{z} - \overline{z} - \overline{z}' - z' - z}{(1+z\cdot z')(1+\overline{z}\cdot\overline{z}')} = 0.
\end{aligned}
$$

Exercice 5.8

Soit $(z; z') \in \mathbb{U}^2$ tel que $zz' \neq -1$. Démontrer par deux méthodes que

$$Z = \frac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}.$$

Deuxième Méthode : On utilise l'écriture exponentielle de z et z'

$$\exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \exists \theta' \in \mathbb{R},\ z' = e^{i\theta'}.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$Z = \frac{z + z'}{1 + z \cdot z'} = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i\theta} e^{i\theta'}} = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i(\theta + \theta')}} = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{e^{i0} + e^{i(\theta + \theta')}}.$$

En utilisant la **formule de l'angle moitie**, on obtient

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{i\theta'} &= 2\cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\,\frac{\theta + \theta'}{2}} \\ e^{i0} + e^{i(\theta + \theta')} &= 2\cos\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) e^{i\,\frac{\theta + \theta'}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 5.8

D'où on conclut

$$Z = \frac{2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\,\frac{\theta+\theta'}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) e^{i\,\frac{\theta+\theta'}{2}}} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.9

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq b$. Démontrer par deux méthodes que :

$$(a \in \mathbb{U} \quad \text{ou} \quad b \in \mathbb{U}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a-b}{1-\overline{a}b} \in \mathbb{U}.$$

Première Méthode : On utilise les propriétés de la conjugaison et du module.

- **Supposons** $a \in \mathbb{U}$. Alors nous avons

$$\overline{a} = \frac{1}{a} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \overline{a}b = 1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a-b}{1-\overline{a}b} = \frac{a-b}{\frac{a-b}{a}} = a \in \mathbb{U}.$$

- **Supposons** $b \in \mathbb{U}$. Alors nous avons

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \frac{|a-b|}{|1-\overline{a}b|} = \frac{\left|\overline{a-b}\right|}{|1-\overline{a}b|} = \frac{|\overline{a}-\overline{b}|}{|1-\overline{a}b|}.$$

Maintenant, puisque $b \in \mathbb{U}$, nous avons $b = \frac{1}{\overline{b}}$. Ce qui nous permet d'écrire

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \frac{|\overline{a}-\overline{b}|}{\left|1-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right|} = |\overline{b}| \cdot \frac{|\overline{a}-\overline{b}|}{|\overline{b}-\overline{a}|} = |\overline{b}| \cdot |-1| = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ainsi

$$\frac{a-b}{1-\overline{a}b} \in \mathbb{U}.$$

Exercice 5.9

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq b$. Démontrer par deux méthodes que :

$$(a \in \mathbb{U} \quad \text{ou} \quad b \in \mathbb{U}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a-b}{1-\overline{a}b} \in \mathbb{U}.$$

Deuxième Méthode : On utilise l'écriture exponentielle de a et b.

- **Supposons** $a \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\theta}$. Ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{a-b}{1-\overline{a}b} = \frac{e^{i\theta}-b}{1-e^{-i\theta}b} = e^{i\theta}\frac{e^{\theta}-b}{e^{i\theta}-b} = e^{i\theta} \in \mathbb{U}.$$

- **Supposons** $b \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta}$. Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \frac{|a-b|}{|1-\overline{a}b|} = \frac{\left|\overline{a-b}\right|}{|1-\overline{a}b|} &= \frac{|\overline{a}-\overline{b}|}{|1-\overline{a}b|} \\ &= \frac{|\overline{a}-e^{i\theta}|}{|1-\overline{a}e^{-i\theta}|} = \left|e^{i\theta}\right| \cdot \frac{|\overline{a}-e^{i\theta}|}{|e^{i\theta}-\overline{a}|} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{a-b}{1-\overline{a}b} \in \mathbb{U}.$$

Exercice 5.10*

Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. Déterminer le module et un argument de :

$$Z = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - 1}{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + 1}$$

Solution : Nous avons

$$Z = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - 1}{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + 1} = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\theta} - e^{i0}}{e^{i\theta} + e^{i0}}$$

En utilisant la **formule de l'angle moitié**, on obtient

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{i0} &= 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ e^{i\theta} + e^{i0} &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

D'où on conclut

$$Z = \frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Exercice 5.10*

Par conséquent :

- si $\theta \in]-\pi, 0[$, alors $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$. Donc

$$Z = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(-i) = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

  Ainsi

$$|Z| = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(Z) = -\frac{\pi}{2} \quad \mod (2\pi).$$

- si $\theta = 0$, alors $\tan(\theta/2) = 0$. Donc $Z = 0$.
- si $\theta \in]0, \pi[$, alors $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. Donc

$$Z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) i = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\pi}{2}}$$

  Ainsi

$$|Z| = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \quad \mod (2\pi).$$

Exercice 5.10

Soit $z \in \mathbb{U}$ dont un argument est dans $]0, \frac{\pi}{3}[$. Déterminer le module et un argument de

$$Z = \frac{1+z^3}{z^2}.$$

Solution : Par hypothèse, il existe $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Nous avons

$$Z = \frac{1+z^3}{z^2} = \frac{1}{z^2} + z = z^{-2} + z = e^{-2i\theta} + e^{i\theta}$$

En utilisant la **formule de l'angle moitie**, on obtient

$$e^{-2i\theta} + e^{i\theta} \quad = \quad 2\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

Or

$$\theta \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[\quad \Longrightarrow \quad \frac{3\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \Longrightarrow \quad \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) > 0.$$

Ainsi

$$|Z| = 2\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(Z) = -\frac{\theta}{2} \mod (2\pi).$$

Exercice 5.11

Exprimer en fonction de $\sin(\theta)$ et de $\cos(\theta)$:

(a) $\cos(2\theta)$

(b) $\sin(2\theta)$

(c) $\cos(3\theta)$

(d) $\sin(4\theta)$

(e) $\sin(5\theta)$

Exercice 5.11

Solution :

(a) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

(b) $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

(c) $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$.

Exercice 5.11

(d) $\sin(4\theta)$: Pour exprimer $\sin(4\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et de $\cos(\theta)$, on commence par noter que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(4\theta) \ = \ \mathrm{Im}\left(e^{4i\theta}\right) \ = \ \mathrm{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4\right)$$

La **formule du binôme de Newton**, nous permet donc d'écrire

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\theta}\right)^4 &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 \\
&= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \cos^{4-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta) \\
&= \cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) \\
&\qquad + \ \sin^4(\theta) \\
&= \Big(\cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)\Big) \\
&\qquad + i\Big(4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)\Big).
\end{aligned}$$

Exercice 5.11

Ainsi

$$\begin{aligned}\sin(4\theta) &= \operatorname{Im}\left(e^{4i\theta}\right) = 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)\\ \cos(4\theta) &= \operatorname{Re}\left(e^{4i\theta}\right) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta).\end{aligned}$$

Exercice 5.11

(e) $\sin(5\theta)$: Pour exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et de $\cos(\theta)$ on commence par noter que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(5\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{5i\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^5\right)$$

La **formule du binôme de Newton**, nous permet donc d'écrire

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\theta}\right)^5 &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 \\
&= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cos^{5-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta) \\
&= \cos^5(\theta) + 5i\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) \\
&\qquad - 10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) + i\sin^5(\theta) \\
&= \Big(\cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta)\Big) \\
&\qquad + i\Big(5\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta)\Big)
\end{aligned}$$

Exercice 5.11

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= \mathrm{Im}\left(e^{5i\theta}\right) = 5\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{5i\theta}\right) = \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta).
\end{aligned}$$

Exercice 5.12

Linéariser :

(a) $\cos^2(\theta)$

(b) $\sin^2(\theta)$

(c) $\cos^3(\theta)$

(d) $\sin^4(\theta)$

(e) $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$

Exercice 5.12

Solution :

(a) $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$.

(b) $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

(c) $\cos^3(\theta) = \frac{3\cos(\theta)+\cos(3\theta)}{4}$.

Exercice 5.12

(d) Pour linéariser $\sin^4(\theta)$, on procède comme suit :

(1) On utilise les **formules d'Euler** pour changer $\sin(\theta)$ en $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

$$\sin^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$$

(2) On développe complètement à l'aide du **binôme de Newton**.

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$$

(3) On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha\theta)$ ou $\sin(\beta\theta)$ grâce à la **formule d'Euler**.

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta) &= \frac{1}{16}\left(6 + \left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}\right) - 4\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right)\right) \\ &= \frac{1}{16}(6 + 2\cos(4\theta) - 8\cos(2\theta)). \\ &= \frac{3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 5.12

(e) Pour linéarise $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$, on procède comme suit :

(1) On utilise les **formules d'Euler** pour changer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

$$\sin^2(\theta)\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3$$

(2) On développe complètement à l'aide du **binôme de Newton**.

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta)\cos^3(\theta) &= -\frac{1}{32}\left(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}\right)\left(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{32}\left(e^{5i\theta} + e^{3i\theta} - 2e^{i\theta} + e^{-5i\theta} + e^{-3i\theta} - 2e^{-i\theta}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 5.12

(3) On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha\theta)$ ou $\sin(\beta\theta)$ grâce à la **formule d'Euler**.

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta)\cos^3(\theta) &= -\frac{1}{32}\left(\left(e^{5i\theta}+e^{-5i\theta}\right)+\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)-2\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{32}(2\cos(5\theta)+2\cos(3\theta)-4\cos(\theta)). \\
&= \frac{2\cos(\theta)-\cos(3\theta)-\cos(5\theta)}{16}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.13

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

(1) Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

(2) En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Solution :

(1) D'après l'**Exercice 5.11(e)**, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= 5\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
&= 5\left(1-\sin^2(\theta)\right)^2\sin(\theta) - 10\left(1-\sin^2(\theta)\right)\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
&= 5\left(1-2\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta)\right)\sin(\theta) - 10\sin^3(\theta) + 11\sin^5(\theta) \\
&= 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta).
\end{aligned}$$

Exercice 5.13

(2) Appliquons la formule précédente au cas où $\theta = \frac{\pi}{5}$. Notons

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \sin(\pi) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ &= x(16x^4 - 20x^2 + 5). \end{aligned}$$

Maintenant, $\sin(\pi) = 0$, donc

$$0 = x(16x^4 - 20x^2 + 5) \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \;\text{ ou }\; 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$$

Or $x = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \neq 0$. Ainsi, x est solution de l'équation

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0.$$

Pour résoudre cette équation bicarrée, posons $Y = y^2$. Elle équivaut alors à l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 16Y^2 - 20Y + 5 &=& 0 \\ y^2 &=& Y \end{array} \right.$$

Exercice 5.13

Cette dernière équation a comme solution

$$y^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

Ce qui nous donne quatre solutions à l'équation en y. Pour déterminer à laquelle correspond le réel x, il reste à observer que

$$\frac{\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \Longrightarrow \quad x = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \Longrightarrow \quad x^2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Or

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad ; \quad \frac{5+\sqrt{5}}{8} \notin \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

D'où une seule possibilité (car $x > 0$)

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Exercice 5.14

En considérant de deux manières le rapport $Z = \frac{a}{b}$ où

$$a = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad b = 1 + i$$

calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} a &= 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{i\pi}{3}} \\ b &= 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} &= \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3} - \frac{i\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Exercice 5.14

De même

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} &= \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

L'unicité de la forme algébrique de Z permet d'en déduire par identification :

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

D'où on conclut :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 5.15

Résoudre d'une manière générale l'équation

$$e^z = Z$$

(d'inconnue z, le nombre complexe $Z \neq 0$ étant fixé) en donnant la forme algébrique des éventuelles solutions.

Solution : On commence par écrire Z sous forme exponentielle $Z = re^{i\theta}$. Soit $z = x + iy$, alors

$$\begin{aligned} Z = e^z \quad & \Longleftrightarrow \quad re^{i\theta} = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\ & \Longleftrightarrow \quad e^x = r \quad \text{et} \quad y = \theta \mod (2\pi) \\ & \Longleftrightarrow \quad x = \ln(r) \quad \text{et} \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ & \Longleftrightarrow \quad z = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Exercice 5.16

Déterminer les racines carrées complexes des nombres suivants :

(1) $a = -3 + 4i$.

(2) $b = -21 - 20i$.

(3) $c = -7 + 24i$.

Exercice 5.16

Détérminer les racines carrés de $a = -3 + 4i$.

1. On cherche les racines de $a = -3 + 4i$ sous la forme $z = x + iy$. L'équation $z^2 = a$ nous donne le système

$$z^2 = -3+4i \iff (x^2-y^2)+i(2xy) = -3+4i \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x^2 - y^2 & = & -3 \\ 2xy & = & 4 \end{array} \right.$$

en identifiant parties réelle et imaginaire.

2. On ajoute l'équation

$$|z|^2 = |a| \quad \iff \quad x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25}.$$

pour trouver les valeurs de x^2 et y^2. Nous avons donc le système

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x^2 + y^2 & = & 5 \\ x^2 - y^2 & = & -3 \\ 2xy & = & 4 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & 1 \\ y^2 & = & 4 \\ xy & = & 2 \end{array} \right.$$

3. On prend ensuite les racines carrées, en faisant attention aux signes relatifs de x et y, donné par l'équation $xy = 2$. **Nous avons donc les solutions :**

$$(x, y) = (1, 2) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (-1, -2) \iff z = 1+2i \quad \text{ou } z = -1-2i.$$

Exercice 5.16

Détérminer les racines carrés de $b = -21 - 20i$.

1. On cherche les racines de $b = -21 - 20i$ sous la forme $z = x + iy$. L'équation $z^2 = b$ nous donne le système
$$z^2 = -21 - 20i \iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = -21 - 20i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 & = & -21 \\ 2xy & = & -20 \end{cases}$$
en identifiant parties réelle et imaginaire.
2. On ajoute l'équation
$$|z|^2 = |b| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{(-21)^2 + (-20)^2} = \sqrt{841} = \sqrt{29^2} = 29.$$
pour trouver les valeurs de x^2 et y^2. Nous avons donc le système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 29 \\ x^2 - y^2 & = & -21 \\ 2xy & = & -20 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 & = & 4 \\ y^2 & = & 25 \\ xy & = & -10 \end{cases}$$
3. On prend ensuite les racines carrées, en faisant attention aux signes relatifs de x et y, donné par l'équation $xy = -10$. **Nous avons donc les solutions :**
$$(x, y) = (2, -5) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (-2, 5) \iff z = 2 - 5i \quad \text{ou } z = -2 + 5i.$$

Exercice 5.16

Détérminer les racines carrés de $c = -7 + 24i$.

1. On cherche les racines de $c = -7 + 24i$ sous la forme $z = x + iy$. L'équation $z^2 = c$ nous donne le système

$$z^2 = -7+24i \iff (x^2-y^2)+i(2xy) = -7+24i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 & = & -7 \\ 2xy & = & 24 \end{cases}$$

en identifiant parties réelle et imaginaire.

2. On ajoute l'équation

$$|z|^2 = |b| \quad \iff \quad x^2 + y^2 = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} = \sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25.$$

pour trouver les valeurs de x^2 et y^2. Nous avons donc le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 25 \\ x^2 - y^2 & = & -7 \\ 2xy & = & 24 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 & = & 9 \\ y^2 & = & 16 \\ xy & = & 12 \end{cases}$$

3. On prend ensuite les racines carrées, en faisant attention aux signes relatifs de x et y, donné par l'équation $xy = 12$. **Nous avons donc les solutions :**

$$(x, y) = (3, 4) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (-3, -4) \quad \iff \quad z = 3+4i \quad \text{ou } z = -3-4i.$$

Exercice 5.17

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

(a) $z = -13$.

Solution :

$$w^2 = -13 \quad \Longleftrightarrow \quad w = \sqrt{13}i \ \text{ ou } \ w = -\sqrt{13}i$$

(b) $z = -3 - 4i$.

Solution : Soit $w = x + iy$, alors

$$w^2 = -3-4i \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} \\ x^2-y^2 & = & -3 \\ 2xy & = & -4 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x^2+y^2 & = & 5 \\ x^2-y^2 & = & -3 \\ xy & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x^2 & = & 1 \\ y^2 & = & 4 \\ xy & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & -2 \end{array} \right. \ \text{ou} \ \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & 2 \end{array} \right.$$

Donc

$$w = 1 - 2i \quad \text{ou} \quad w = -1 + 2i.$$

Exercice 5.17

(c) $z = -3 + 4i$.

Solution : Soit $w = x + iy$, alors

$$w^2 = -3 + 4i \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ x^2 - y^2 & = & -3 \\ 2xy & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x^2 + y^2 & = & 5 \\ x^2 - y^2 & = & -3 \\ xy & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 1 \\ y^2 & = & 4 \\ xy & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & -2 \end{array}\right.$$

Donc

$$w = 1 + 2i \quad \text{ou} \quad w = -1 - 2i.$$

Exercice 5.17

(d) $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} z = 1 + i\sqrt{3} &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} w^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad &\iff \quad w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad w = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &\iff \quad w = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad w = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ &\iff \quad w = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad w = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 5.17

(e) $z = 5 - 12i$.

Solution : Soit $w = x + iy$

$$w^2 = 5 - 12i \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} \\ x^2 - y^2 & = & 5 \\ 2xy & = & -12 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x^2 + y^2 & = & 13 \\ x^2 - y^2 & = & 5 \\ xy & = & -6 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x^2 & = & 9 \\ y^2 & = & 4 \\ xy & = & -6 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3 \\ y & = & -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -3 \\ y & = & 2 \end{array}\right.$$

Donc

$$w = 3 - 2i \quad \text{ou} \quad w = -3 + 2i.$$

Exercice 5.18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 + z + 1 = 0$

(b) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

(c) $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$

(d) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$

Avant de résoudre ces équations, rappelons le théorème suivant :

Théorème (Équations du second degré à coefficients complexes)

Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Alors les solutions de l'equation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

sont

$$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Exercice 5.18

(a) Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$.

Solution : Nous avons

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3.$$

Or, nous savons que les deux racines carrées du discriminant sont

$$\sqrt{3}i \quad \text{et} \quad -\sqrt{3}i$$

Par conséquent, les solutions de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, sont

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Notons que

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

et

$$\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \overline{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2.$$

Exercice 5.18

(b) Résoudre $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-2(2+i))^2 - 4(6+8i) = 4(2+i)^2 - 24 - 32i \\
&= 4(4+4i-1) - 24 - 32i = -12 - 16i \\
&= -4(3+4i) \\
&= 4(-3-4i).
\end{aligned}$$

Or, d'après l'exercice précédent, nous savons que les deux racines carrées du complexe $-3-4i$ sont

$$1-2i \quad \text{et} \quad -1+2i.$$

Ainsi, les deux racines carrées du discriminant sont :

$$2(1-2i) = 2-4i \quad \text{et} \quad -2(1-2i) = -2+4i$$

Exercice 5.18

Par conséquent, les solutions de l'équation $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$, sont

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{2(2+i)+(2-4i)}{2} = 2+i+1-2i = 3-i. \\
z &= \frac{2(2+i)-(2-4i)}{2} = 2+i-1+2i = 1+3i.
\end{aligned}
$$

Exercice 5.18

(c) Résoudre $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta &= (4i-3)^2 - 4i(i-5) \\ &= -3-4i. \end{aligned}$$

Or, d'après le exercice précédent, nous savons que les deux racines carrées du discriminant sont

$$1-2i \quad \text{et} \quad -(1-2i)$$

Par conséquent, les solutions de l'équation $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$, sont

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(4i-3)+(1-2i)}{2i} = \frac{4-6i}{2i} = -3-2i. \\ z &= \frac{-(4i-3)-(1-2i)}{2i} = \frac{2-2i}{2i} = -1-i. \end{aligned}$$

Exercice 5.18

(d) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0.$

Solution : On pose $Z = z^2$. Nous allons d'abord résoudre

$$Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(5-14i))^2 - 4(-2(5i+12)) \\ &= -75 - 100i \\ &= 25(-3-4i).\end{aligned}$$

Or, d'après l'exercice précédent, nous savons que les deux racines carrées de $-3-4i$ sont :

$$1-2i \quad \text{et} \quad -1+2i.$$

Donc les deux racines carrées du discriminant sont :

$$5(1-2i) = 5-10i \quad \text{et} \quad -5(1-2i) = -5+10i$$

Exercice 5.18

Par conséquent, les solutions de l'équation
$Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(5i + 12) = 0$, sont

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(5-14i)+(5-10i)}{2} = 5 - 12i. \\ Z &= \frac{(5-14i)-(5-10i)}{2} = -2i. \end{aligned}$$

Ainsi, pour trouver les solutions de $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$, il nous faut résoudre

$$\begin{aligned} z^2 &= 5 - 12i \\ \text{et} \quad z^2 &= -2i \;=\; 2e^{-\frac{i\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Maintenant, d'après l'exercice précédent on sait que

$$z^2 = 5 - 12i \quad \Longleftrightarrow \quad z = 3 - 2i \;\text{ ou }\; z = -3 + 2i.$$

Exercice 5.18

De même

$$z^2 = -2i = 2e^{-\frac{i\pi}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad z = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Les solutions de l'équation $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$, sont donc

$$\left\{3 - 2i,\ -3 + 2i,\ \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}},\ -\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right\}.$$

Exercice 5.19

On note $\alpha = e^{\frac{i2\pi}{5}}$. On pose $A = \alpha + \alpha^4$ et $B = \alpha^2 + \alpha^3$.

(1) Justifier que A et B sont les solutions de l'équation

$$(E) : x^2 + x - 1 = 0.$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} A^2 + A - 1 &= \left(\alpha + \alpha^4\right)^2 + (\alpha + \alpha^4) - 1 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha^5 + \alpha^8 + \alpha + \alpha^4 - 1. \end{aligned}$$

Mais $\alpha^5 = 1$, donc

$$\begin{aligned} A^2 + A - 1 &= \alpha^2 + 2\alpha^5 + \alpha^8 + \alpha + \alpha^4 - 1 \\ &= \alpha^2 + 2 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^4 - 1 \\ &= \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi A est solution de $x^2 + x - 1 = 0$. Le même raissonement nous permet de conclure que B est solution de l'equation.

Exercice 5.19

(2) Déterminer A en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} \alpha+\alpha^4 &= e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{8i\pi}{5}} \\ &= e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{10i\pi}{5}}e^{-\frac{2i\pi}{5}} \\ &= e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{2i\pi}e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{-2i\pi}{5}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha^2+\alpha^3 &= e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{6i\pi}{5}} \\ &= e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{10i\pi}{5}}e^{-\frac{4i\pi}{5}} \\ &= e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{2i\pi}e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{-4i\pi}{5}}. \end{aligned}$$

La formule d'Euler nous permet donc de conclure

$$A=\alpha+\alpha^4=e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{-2i\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Ainsi, $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de $x^2+x-1=0$.

Exercice 5.19

(3) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Solution : Le discriminant de $x^2+x-1=0$ est 5. Les solutions de l'equation sont sont donc

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Puisque $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de $x^2+x-1=0$, on conclut que la valeur du cosinus est

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \textit{ou} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Finalement, $\frac{2\pi}{5}$ étant inferieur à $\frac{\pi}{2}$ son cosinus est positif. D'où

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 5.20

1. Calculer les racines cubiques de $\frac{-1+i}{4}$ et montrer que l'une d'elles a une puissance quatrième réelle.
2. Calculer les racines 5^{es} de -1.
3. Calculer les racines 8^{es} de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.
4. Résoudre l'équation $\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2}$.

Exercice 5.20

Calculer les racines cubiques de $\frac{-1+i}{4}$ et montrer que l'une d'elles a une puissance quatrième réelle.

Solution : Commençons par chercher une forme exponentielle de $\frac{-1+i}{4}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(-1+i) &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.20

Soit $\zeta = re^{i\theta}$ une racine cubique de $\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, alors

$$\begin{aligned}
\zeta^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad &\Longleftrightarrow \quad r^3 e^{3i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&\Longleftrightarrow \quad r^3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad 3\theta = \frac{3\pi}{4} \quad \mod (2\pi) \\
&\Longleftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}^3} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 5.20

Ainsi, les racines cubiques de $\frac{-1+i}{4}$ sont

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} \\
\zeta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2i\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{11i\pi}{12}} \\
\zeta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{4i\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{19i\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-5i\pi}{12}}.
\end{aligned}$$

Pour finir, notons que

$$\zeta_0^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 = \frac{1}{4} e^{i\pi} = -\frac{1}{4}.$$

Exercice 5.20

Calculer les racines 5^{es} de -1.

Solution : Commençons par chercher une forme exponentielle de -1. Nous avons

$$-1 = e^{i\pi}.$$

Soit $\zeta = re^{i\theta}$ une racine cinquieme de -1, alors

$$\begin{aligned}
\zeta^5 = e^{i\pi} \quad &\Longleftrightarrow \quad r^5 e^{5i\theta} = e^{i\pi} \\
&\Longleftrightarrow \quad r^5 = 1 \quad \text{et} \quad 5\theta = \pi \quad \mod (2\pi) \\
&\Longleftrightarrow \quad r = 1 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5},\ k = 0, 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

Ainsi, les racines 5^{es} de -1 sont

$$\zeta_k \quad = \quad e^{\frac{i\pi}{5} + \frac{2ik\pi}{5}} = e^{\frac{i(1+2k)\pi}{5}},\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Exercice 5.20

Calculer les racines 8^{es} de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Solution : Commençons par chercher une forme exponentielle de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$. Nous avons

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\cdot e^{-\frac{i\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5i\pi}{12}}$$

Soit $\zeta = re^{i\theta}$ une racine cubique de $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5i\pi}{12}}$, alors

$$\begin{aligned}
\zeta^8 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5i\pi}{12}} \quad &\iff \quad r^8 e^{8i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5i\pi}{12}} \\
&\iff \quad r^8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad 8\theta = \frac{5\pi}{12} \mod (2\pi) \\
&\iff \quad r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{5\pi}{96} + \frac{2k\pi}{8},\ k = 0, 1, \cdots, 7.
\end{aligned}$$

Ainsi, les racines 8^{es} de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ sont

$$\zeta_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}} e^{\frac{5i\pi}{96}+\frac{2ik\pi}{8}} = e^{\frac{i(5+24k)\pi}{96}},\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Exercice 5.20

Résoudre l'équation $\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2}$.

Solution : Soit $z = re^{i\theta}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2} \quad & \Longleftrightarrow \quad 1 = \overline{z}^7 z^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad 1 = \overline{r^7 e^{7i\theta}} r^2 e^{2i\theta} \\
& \Longleftrightarrow \quad 1 = r^9 e^{-7i\theta} e^{2i\theta} \\
& \Longleftrightarrow \quad 1 = r^9 e^{-5i\theta} \\
& \Longleftrightarrow \quad e^{i0} = r^9 e^{-5i\theta} \\
& \Longleftrightarrow \quad 1 = r^9 \quad \text{et} \quad -5\theta = 0 \quad \mod (2\pi) \\
& \Longleftrightarrow \quad 1 = r^9 \quad \text{et} \quad 5\theta = 0 \quad \mod (2\pi) \\
& \Longleftrightarrow \quad 1 = r \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2k\pi}{5},\ k = 0, 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation $\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2}$ sont

$$z = e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Exercice 5.21

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 - 1 = 0$ et représenter les solutions.

Solution : Ce sont les racines 5^{es} de l'unité, c'est-à-dire les complexes de la forme

$$e^{\frac{2ik\pi}{5}}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Les solutions forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité.

(2) On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

(a) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 &= \frac{1 - u^5}{1 - u} \\ &= \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1 - 1}{1 - u} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 5.21

(b) Vérifier que $u + u^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $u^2 + u^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
u + u^4 &= e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} \\
&= e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{10i\pi}{5}} e^{-\frac{2i\pi}{5}} \\
&= e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{2i\pi} e^{-\frac{2i\pi}{5}} \;=\; e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u^2 + u^3 &= e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} \\
&= e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{10i\pi}{5}} e^{-\frac{4i\pi}{5}} \\
&= e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{2i\pi} e^{-\frac{4i\pi}{5}} \;=\; e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{-4i\pi}{5}}.
\end{aligned}$$

La formule d'Euler nous permet donc de conclure

$$\begin{aligned}
u + u^4 &= e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \\
u^2 + u^3 &= e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{-4i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 5.21

(3) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ puis calculer

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 &= (u+u^4)^2 + (u+u^4) - 1 \\ &= u^2 + u^8 + 2u^5 + u + u^4 - 1. \end{aligned}$$

Mais $u^5 = 1$, donc

$$\begin{aligned} 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 &= u^2 + u^3 + 2 + u + u^4 - 1 \\ &= u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 = 0. \end{aligned}$$

Le même raisonaiment nous permet de montrer que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ est solution de $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Exercice 5.21

Maintenant, le discriminant de $4x^2 + 2x - 1 = 0$ est 20. Ainsi, les solutions de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, sont

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont des solutions de $4x^2 + 2x - 1 = 0$, on conclut que ces deux cosinus valent

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Finalement, $\frac{2\pi}{5}$ étant inferieur à $\frac{\pi}{2}$ son cosinus est positif, le second est négatif. D'où

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$