E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
2^e **Année Classe Préparatoire**

T.D. MATHEMATIQUES CPI. II

T.D. n° 4 **(Suites et Séries de Fonctions)**
le 20 novembre 2019

Ex.1

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites d'applications suivantes :

a)

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

b)

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^n-1}{x^n+1}$$

c)

$$f_n : [0,\ 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$$

d)

$$f_n : [0,\ 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} (n-1)x, \text{ si } \ x \in \ [0, \frac{1}{n}] \\ \\ 1-x, \text{ si } \ x \in \ [\frac{1}{n},\ 1] \end{array} \right\}$$

e)

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin(\sqrt{x+4\pi^2n^2}) - \frac{x}{4n\pi};$$

f)

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!};$$

g)

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2} \quad \text{si } \ x \neq 0 \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{array} \right\}$$

Ex.2

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1)

$$f_n : [-\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)+\sin^2(x)+\ \cdots + \sin^{2n}(x)}$$

2)

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$$

où α est un nombre réel donné.

3)

$$f_n : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin^n x$$

<u>Ex.3</u>

Soient : $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application.

On suppose que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

a) Soit, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application.

Montrer que $\{f_n \circ \phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \circ \phi$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue.

Montrer que : $\{g \circ f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la suite des fonctions :

$$\left\{\frac{|f_n|}{1+f_n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

converge uniformément vers $\dfrac{|f|}{1+f^2}$.

<u>Ex.4</u>

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x + x^n)^n$$

a) Etudier la convergence simple et uniforme de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

b) Montrer que lorsque $n \to +\infty$:

$$\int_0^1 f_n(x)dx \sim \frac{2^{n+1}}{n^2}$$

<u>Ex.5</u>

Calculer :

$$\lim_{n\to +\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to +\infty} \int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^2)^n}dx$$