Equations Différentielles

Exercice 1

Donner une équation différentielle dont la fonction f est une solution.

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
2. $f(x) = \dfrac{c}{1+e^x}$; où $c \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 1 + \dfrac{e^x}{1+x^2}$.
4. $f(x) = \dfrac{ax}{1+x^2}$; où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles. Préciser le domaine de validité des solutions :

1. $y' = -2y$,
2. $yy' = -t$.
3. $y' = ty$,
4. $y' = e^{t-y}$.
5. $t^2 y' = -y$,
6. $\left(1+t^2\right) y' = 1 + y^2$.
7. $y' = \dfrac{y}{1+t^2}$.
8. $\left(1+t^2\right) y' = \dfrac{1+y^2}{t^3}$
9. $y' = \dfrac{y}{1-t^2}$.
10. 10. $y' = e^{-y} \tan t$.

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles :

1. $x^3 y' = xy^2 + x^2 y + 2y^3$,
2. $xy' = y + x \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$,
3. $x^2 y' = xy - 5y^2$,
4. $xyy' = x^2 - xy + y^2$.

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles, par la méthode de variation de la constante. Préciser le domaine de validité des solutions :

1. $y' = -2ty + t$

2. $y' = -\frac{y}{t^2} - \frac{1}{t^3}$
3. $y' = -y\tan t + \cos t \sin t$
4. $y' = -\frac{y}{t^2} + \exp\left(\frac{1}{t}\right)$
5. $y' = -\frac{y}{t^2-1} + t^2$
6. $y' = 2ty - (2t-1)e^t$
7. $y' = -\frac{y}{t} - 1$
8. $y'\cos t + y\sin t = \cos t + t\sin t$
9. $y' = \frac{(2t-1)}{t^2-1}y + 1$
10. $\left(e^t - 1\right)y' + \left(e^t + 1\right)y = 3 + 2e^t$

Exercice 5

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $xy' - y = x$; et $y(1) = 1$
2. $y' - y\cos t = 2\cos t - \sin^2 t \cos t$; et
3. $y' + x^2y + x^2 = 0$; et $y(0) = 0$ $y(0) = 1$
4. $y' - y = \cos x + e^x \sin 2x$; et $y(0) = 0$
5. $(x-1)y' + y = x$; et $y(2) = 2$
6. $t(t-1))y' - (3t-1)y = -t^2(t+1)$; et
7. $4y' - y = \cos x$; et $y(0) = 0$ $y(2) = 0$
8. $y' - y = \sinh x$; et $y(0) = 1$
9. $e^x y' + y = 0$; et $y(0) = 1$

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles :

1. $x^3y' = x^2y + y^2 - x^2$
2. $y' = y^2 - \frac{1}{x^2}$
3. $y' - y + xy^3 = 0$
4. $y' - y + xy^4 = 0$
5. $xy' - y + \frac{x^4}{y^3} = 0$
6. $xy' - \frac{3}{4}y = (9x-3)y^5$

Exercice 7

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y' + \frac{y}{x} - y^2 + \frac{1}{x^2} = 0$; et $y(-1) = -2$
2. $\left(1 + x^2\right)y' = y^2 - 1$; et $y(0) = 2$

3. $xy' = y^2 - 3xy - 1; \quad \text{et} \quad y(3) = 9$
4. $xy' = -y + xy^3; \quad \text{et} \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

<u>Exercice 8</u>

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' - 6y' + 9y = 0$
2. $y'' + 4y' - 16y = 0$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$
4. $y'' - y = t^3 + t^2$
5. $y'' + 4y = 0\,;$
6. $y'' + 2y' + y = e^t$
7. $y'' - 6y' + 10y = 0$
8. $y'' + 2y' + y = e^t + \cos t$
9. $y'' + 5y' + 6y = 0$
10. $y'' + 2y' + 4y = t^2 e^t$
11. $y'' - 2y' + 2y = te^t \cos t$
12. $y'' + 3y' + 2y = e^{2t}(t+1)$
13. $y'' - y = -6\cos t + 2t \sin t$
14. $y'' - 3y' + 2y = e^t \left(t^2 + 1\right)$
15. $y'' - 2y' + y = e^t \sin t$
16. $y'' + y' - 6y = e^t(2t+1)$

<u>Exercice 9</u>

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - y' - 2y = 0; \quad \text{et} \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$
2. $y'' + 4y' + 3y = 0; \quad \text{et} \quad y(0) = 2, y'(0) = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0; \quad \text{et} \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
4. $y'' + 10y' + 25y = t^3; \quad \text{et} \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

<u>Exercice 10</u>

Résoudre les équations différentielles :

1. $y''' - y'' - 2y' = 0$
2. $t^2 y'' + 3ty' + y = 0$
3. $y'''' + 4y''' + 3y'' = 0$
4. $t^2 y'' + ty' + y = 0$

<u>Exercice 11</u>

Résoudre les systèmes différentiels linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 4x + 4y \\ y' = -x - y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 4x - 6y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = x + y + t \\ y' = -2x + 4y + e^t \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 5x - 4y + 1 \\ y' = -x + 2y + e^t \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$
9. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + e^t \\ z' = x + y + z \end{cases}$

Exercice 12

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes y suivantes :

1. $y = \dfrac{c}{x}$; où $c \in \mathbb{R}$
2. $yy' = 1 + t^2$.
3. $y = cx^2$; où $c \in \mathbb{R}$
4. $yy' = 1 - t^2$.
5. $y' = -2ty$,
6. $y' = e^y \tan t$.
7. $t^2 y' = -y^2$,

Exercice 13

Déterminer les solutions de $y'' + 2iy = 0$ valant 1 en 0 et de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 14

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + y = |x| + 1$.

Exercice 15

Soit x et y des fonctions de la variable t. Résoudre les système différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos(t) \\ y' = x + 2ty + t\sin(t) \end{cases}$

On pourra poser $u = x + y$ et $v = x - y$ pour le système 1 , trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par x pour le système 2 , et poser $u = x + iy$ pour le système 3 .

Exercice 16

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle d'Euler (E) : $at^2y'' + bty' + cy = f(t)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ et f une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1. Posons $z(x) = y(e^x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.
2. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' + ty' + y = \cos(2\ln(t))$ pour $t > 0$.
3. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' - 2ty' + 2y = 2t^3\sin(2t)$ pour $t > 0$.

<u>**Solution**</u>

1. On considère y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ Cest done une fonction deux fois dérivable, qui satisfait :

$$at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = f(t).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $t = e^x$. En reportant dans l'équation précédente, on obtient :

$$ae^{2x}y''(e^x) + be^xy'(e^x) + cy(e^x) = f(e^x)$$

Posons $z(x) = y(e^x)$. z est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$z'(x) = e^xy'(e^x) \text{ et } z''(x) = e^{2x}y''(e^x) + e^xy'(e^x).$$

Dès lors, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si

$$ae^{2x}y''(e^x) + be^xy'(e^x) + cy(e^x) = f(e^x)$$

soit encore en reportant :

$$az''(x) + (b-a)z'(x) + cz(x) = f(e^x)$$

2. On pose donc $z(x) = y(e^x)$. Par ce qu'on a fait précédemment, on est ramené à résoudre l'équation

$$z'' + z = \cos(2x).$$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$. On cherche à présent une solution particulière de l'équation, en utilisant le principe de superposition :

$$(E_1) : z'' + z = \frac{e^{2ix}}{2} \text{ et } (E_2) : z'' + z = \frac{e^{-2ix}}{2}$$

Pour (E_1), $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme $z_1(x) = ae^{2ix}$. En reportant on obtient $a = -\frac{1}{6}$, et donc $z_1(x) = -\frac{1}{6}e^{2ix}$. Une solution particulière de (E_2) s'obtient en prenant le conjugué : $z_2(x) = -\frac{1}{6}e^{-2ix}$. Finalement une solution particulière de (E) est

$z(x)=z_1(x)+z_2(x)=-\frac{1}{3}\cos(2x)$. Ainsi, les solutions de $z''+z=\cos(2x)$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto -\frac{1}{3}\cos(2x)+A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $A,B\in\mathbb{R}$. Et les solutions de l'équation de départ sont les fonctions de la forme $t\mapsto -\frac{1}{3}\cos(2\ln(t))+A\cos(\ln(t))+B\sin(\ln(t))$ avec $A,B\in\mathbb{R}$.

Exercice 17

Résoudre l'équation suivante sur] - 1, 1[:

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=0$$

On pourra poser $x=\sin(t)$.

Exercice 18

Soit $(E):(1+x)y''-2y'+(1-x)y=(1+x)^3e^x, x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $x\mapsto e^x$ est une solution de l'équation homogène associée.
2. Soit y une solution de (E) et z définie par $y(x)=z(x)e^x$ (on reconnait la méthode de variation de la constante), montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E_1) que l'on résoudra.
3. Donner les solutions de (E).
4. En utilisant la méthode mise en oeuvre précédement, résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$ en notant que $x\mapsto\frac{1}{x}$ est solution de de cette équation.

Solution

On va résoudre l'équation sur $I=]-1,+\infty[$, intervalle sur lequel le coefficient en y'' ne s'annule pas (il faudrait faire un raccordement pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$..).

1. Il suffit de le vérifier.
2. Soit y une solution de (E) sur I. Alors y est deux fois dérivable sur I, et $z(x)=e^{-x}y(x)$ l'est aussi par produit. Pour tout $x\in I$, on a :

   $$y'(x)=e^x\left(z(x)+z'(x)\right)\text{ et }y''(x)=e^x\left(z(x)+2z'(x)+z''(x)\right)$$

   En reportant dans l'équation, on obtient que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution de l'équation

   $$(E_1):(1+x)u'+2xu=(1+x)^3.$$

   C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 , qu'on peut normaliser sur I :

   $$u'+\frac{2x}{1+x}u=(1+x)^2$$

   Une primitive de $\frac{2x}{1+x}$ est $-2\ln(|x+1|)+2x$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :

   $$x\mapsto\lambda e^{2\ln(|x+1|)-2x}=\lambda(x+1)^2e^{-2x}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche à présent une solution particulière par la méthode de variation de la constante, de la forme $y(x) = \lambda(x)(x+1)^2 e^{-2x}$ avec λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a en reportant :

$$\lambda'(x)(x+1)^2 e^{-2x} = \lambda(x+1)^2$$

soit $\lambda'(x) = e^{-2x}$. On prend $\lambda(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$, et $y(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2}$. Ainsi les solutions de l'équation (E_1) sur I sont :

$$x \mapsto \lambda(x+1)^2 e^{-2x} + \frac{(x+1)^2}{2}$$

3. On obtient alors $z'(x) = \lambda(x+1)^2 e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}$ dont il faut déterminer une primitive. On procède par intégration par parties :
On obtient alors $z'(x) = \lambda(x+1)^2 e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}$ dont il faut déterminer une primitive. On procède par intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & (x+1)^2 & & e^{-2x} \\
- & \searrow & & \\
2(x+1) & & -\dfrac{e^{-2x}}{2} & \\
2 & \searrow & \dfrac{e^{-2x}}{4} & \\
- & 0 & \searrow & -\dfrac{e^{-2x}}{8}
\end{array}$$

Les fonctions $x \mapsto (x+1)^2$ et $x \mapsto e^{-2x}$ sont de classe $\mathcal{C}^3$. On obtient donc :

$$z(x) = \lambda \int (x+1)^2 e^{-2x} + \frac{(x+1)^2}{2} dx = -\lambda \frac{(x+1)^2}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{x+1}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{(x+1)^3}{6} + \mu$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement les solutions de l'équation de départ sur I sont les fonctions $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$:

$$x \mapsto \left(-\lambda \frac{(x+1)^2}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{x+1}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{(x+1)^3}{6} + \mu \right) e^x.$$

Exercice 19

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$
2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.
Solution

1. L'équation différentielle $y' - e^x e^y = 0$ est à variables séparées : en effet, en divisant par e^y, on obtient $-y' e^{-y} = -e^x$. Le terme de gauche est la dérivée de e^{-y}(y est une fonction de x), celui de droite est la dérivée de $x \mapsto -e^x$:
$$\frac{e^{-y}}{x} = \frac{(-e^x)}{x}$$
Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près : ainsi y est solution sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, e^{-y} = -e^x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $-e^x + c > 0$, c'est-à-dire si $c > 0$ et $x < \ln c$. On obtient ainsi les solutions :
$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{ pour } x \in I_c =]-\infty; \ln c[)$$
où c est un paramètre réel strictement positif. Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c > 0$ tel que $0 \in I_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 1$ et $c - 1 = 1$. Il s'agit donc de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $I_2 =]-\infty; \ln 2[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, c'est la première bissectrice. Comme par construction y_2' est à valeurs strictement positives, la fonction y_2 est strictement croissante.
2. Posons $z(x) = x + y(x)$: z a le même domaine de définition que y et est dérivable si et seulement si y l'est. En remplaçant $y(x)$ par $z(x) - x$ dans l'équation différentielle $y' - e^x e^y = -1$, on obtient $z' - e^z = 0$, c'està-dire $z' e^{-z} = 1$. Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées : en intégrant cette égalité, on obtient que z est solution sur J si et seulement si elle est dérivable sur J et $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in J, e^{-z} = -x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $c > x$. On obtient ainsi les solutions :
$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{ pour } x \in J_c =]-\infty; c[)$$
où c est un paramètre réel. Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in J_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 0$ et $c = 1$. Il s'agit donc de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $J_1 =]-\infty; 1[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: elle est horizontale.