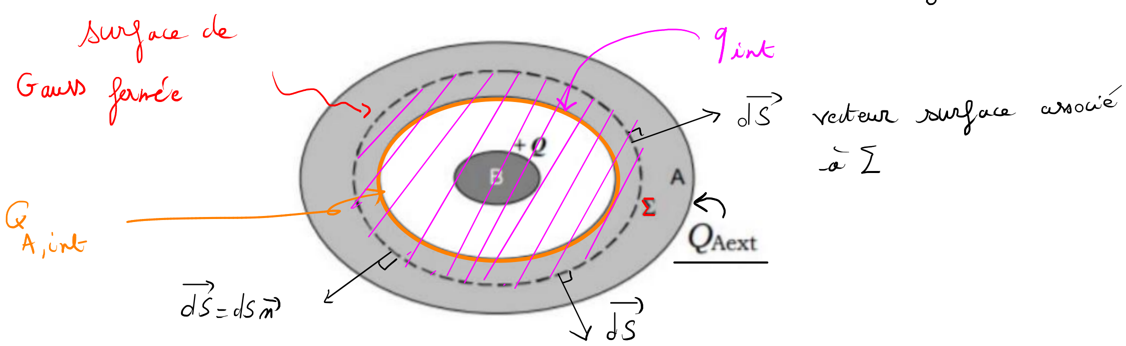
4 | Conducteurs à l'équilibre électrostatique

Exercice 1 – Conducteur creux
Soit A, un conducteur creux.
On place en son sein un second conducteur noté B portant une charge $+Q$: $Q_B = +Q$



1/ Retrouver le fait que $Q_{A,int} = -Q_B = -Q$ en utilisant le théorème de Gauss. On note $Q_{A,\text{int}}$: charge surfacique présente au niveau de la surface intérieure de A.

- Σ : surface de Gauss fermé dans le conducteur A.

Théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- or dans un conducteur à l'équilibre électrostatique (A ici), $\vec{E} = 0$ à l'intérieur de A

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \underbrace{\vec{0}.\vec{dS}}_{=0} = \oiint 0 = 0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

↳ $\boxed{q_{int} = 0}$ or $q_{int} = Q_{A,int} + Q_B = 0$

$Q_{A,int} = -Q_B = -Q$

2/ Calculer la charge extérieure $Q_{A,\text{ext}}$ (i.e. charge surfacique présente au niveau de la surface extérieure de A) dans les cas suivants :
a) A est isolé et initialement neutre.
b) A porte une charge initiale q

a) A initialement neutre + isolé : $Q_A = Q_{A,ext} + Q_{A,int} = 0$

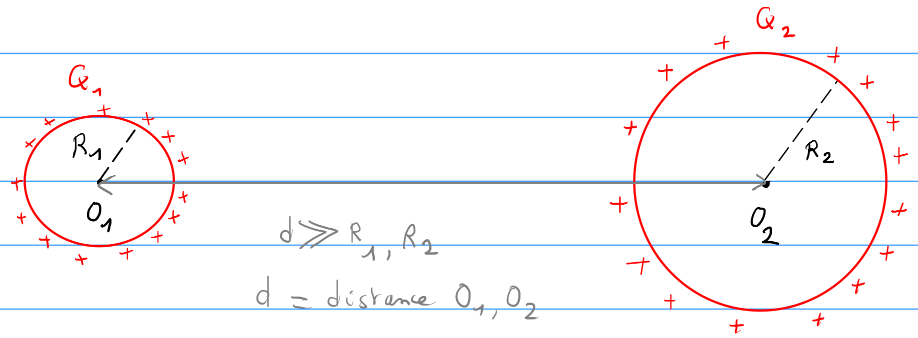
donc $Q_{A,ext} = 0 - Q_{A,int} = 0 - (-Q) = +Q$

b) A porte une charge q : $Q_A = Q_{A,ext} + Q_{A,int} = q$

donc $Q_{A,ext} = q - Q_{A,int} = q - (-Q) = q + Q$

Exercice 2 – *
On considère deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 dont les centres sont à une distance d grande devant R_1 et R_2. Elles portent les charges respectives Q_1 et Q_2.

1/ Calculer les potentiels V_1 et V_2 de chacune des sphères, en leur centre: O_1 et O_2



charge en P : $Q(P)$

Potentiel en M : $V(M) = \dfrac{Q(P)}{4\pi\varepsilon_0 r_{PM}}$

1) Potentiels :

↳ Pour la $1^{ère}$ sphère conductrice, les charges sont réparties en surface à la distance R_1 du centre O_1. Ces charges créent un potentiel : $V_1^{(a)}$

en O_1, $V_1^{(a)} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$; (R_1 : distance entre Q_1 et O_1)

à la distance d, et $d \gg R_1, R_2$, les charges de la 2^e sphère créent un potentiel $V_1^{(b)}$

en O_1, $V_1^{(b)} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d(O_1, Q_2)} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$

$d(O_1, Q_2)$: distance entre O_1 et les charges sur la $2^{ème}$ sphère

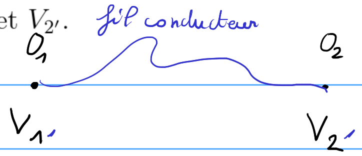
$d(O_1, Q_2) \simeq d + \underbrace{\ldots}_{\text{négligeable}}$

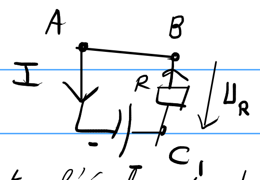
donc $\boxed{V_1 = V_1^{(a)} + V_1^{(b)} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}}$, en O_1

$(1 \leftrightarrow 2)$

de même : $$V_2 = V_2^{(a)} + V_2^{(b)} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}, \text{ en } O_2$$

2/ On relie les sphères par un fil conducteur. Calculer les charges $Q_{1'}$ et $Q_{2'}$, ainsi que les potentiels notés $V_{1'}$ et $V_{2'}$.





- $V_A = V_B$
- $U_R = V_C - V_B = R\,i$

En reliant les sphères par un fil, on permet l'écoulement des charges d'une sphère à l'autre. Le potentiel devient : $V' = V_{1'} = V_{2'}$ (1)

La charge totale est conservée : $Q_1 + Q_2 = Q_{1'} + Q_{2'}$ (2)

$$(1)\quad V_{1'} = V_{2'} = \frac{Q_{1'}}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_{2'}}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q_{2'}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_{1'}}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$(2)\quad Q_1 + Q_2 = Q_{1'} + Q_{2'}$$

avec (1) : $$Q_{2'}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d}\right] = Q_{1'}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d}\right]$$ dans (2)

$$Q_{1'}\left[1 + \left(\frac{\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d}\right]}{\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d}\right]}\right)\right] = Q_1 + Q_2$$

$$Q_{1'}\left(\frac{\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d}\right] + \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d}\right]}{\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d}\right]}\right) = Q_1 + Q_2$$

$$Q_{1'}\left(\frac{1/R_1 + 1/R_2 - 2/d}{1/R_2 - 1/d}\right) = Q_1 + Q_2$$

$1 \leftrightarrow 2$

$$Q_{1'} = (Q_1 + Q_2)\left(\frac{1/R_2 - 1/d}{1/R_1 + 1/R_2 - 2/d}\right) \; ; \quad Q_{2'} = (Q_1 + Q_2)\left(\frac{1/R_1 - 1/d}{1/R_1 + 1/R_2 - 2/d}\right)$$

. $d \gg R_1, R_2$

donc $\;\cdot\; V' = V_{1'} = V_{2'} = \left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[\dfrac{Q_{1'}}{R_1} + \dfrac{Q_{2'}}{d}\right]$

$$V' = \left(\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1/(R_2R_1) - \cancel{1/(R_1 d)} + \cancel{1/(R_1 d)} - 1/d^2}{1/R_1 + 1/R_2 - 2/d}\right] \times \frac{R_2R_1}{R_2R_1}$$

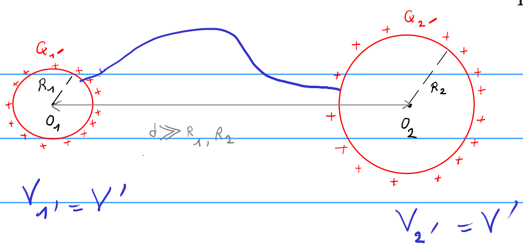
$$V' = \underbrace{\left(\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\right)}_{\frac{[q]}{[\varepsilon_0]}}\left[\frac{\overbrace{1 - \frac{R_2R_1}{d^2}}^{[\cdot]=1}}{\underbrace{R_2 + R_1 - 2(R_2R_1/d)}_{L}}\right]$$

analyse dimensionnelle : $[V'] = \dfrac{[q]}{[\varepsilon_0]}\,L^{-1}$

et $d \gg (R_1 \text{ ou } R_2) \Longrightarrow \dfrac{R_2R_1}{d^2} \ll 1$ (au 2^e ordre) négligeable par rapport à 1, et $\dfrac{R_2R_1}{d}$ reste. On conserve que les terme du 1^{er} ordre en $R_{1(2)}/d$

donc
$$\boxed{V' = \left(\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{R_1 + R_2 - \frac{2R_1R_2}{d}}\right]} = V_{1'} = V_{2'}$$

3/ Calculer la capacité de ce conducteur constitué des deux sphères reliées par le fil conducteur.



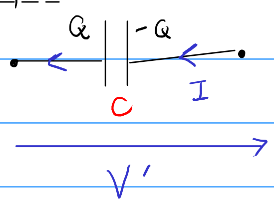
• $\underline{Q_1 + Q_2} = Q_{1'} + Q_{2'} = \underline{Q}$: charge du conducteur

avec V' potentiel entre les deux sphères

capacité : conducteur portant une charge Q avec une différence de potentiel (d.d.p) V', il existe une relation linéaire entre Q et V' :

$$\boxed{Q = \underset{\text{Capacité}}{C}\, V'}$$

exemple : condensateur



$Q = C\,V'$

$$\boxed{V' = \frac{Q}{C}}$$

pour les deux sphères.

$$V' = \left(\frac{\overset{Q}{Q_1 + Q_2}}{4\pi\varepsilon_0}\right)\overbrace{\left[\frac{1}{R_1 + R_2 - \frac{2R_1R_2}{d}}\right]}^{\frac{1}{C}}$$

plus $d \nearrow$, plus C est grand.

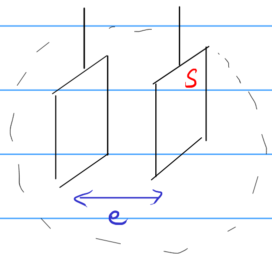
$$\Rightarrow \quad C = 4\pi\varepsilon_0 \left[R_1 + R_2 - \frac{2R_1R_2}{d} \right]$$

dimension : $[C] = [\varepsilon_0]\, L$ exercice 3

exemple : conductimètre (mesure de la conductance)

↳ 2 plaques conductrices de surface S distantes de e

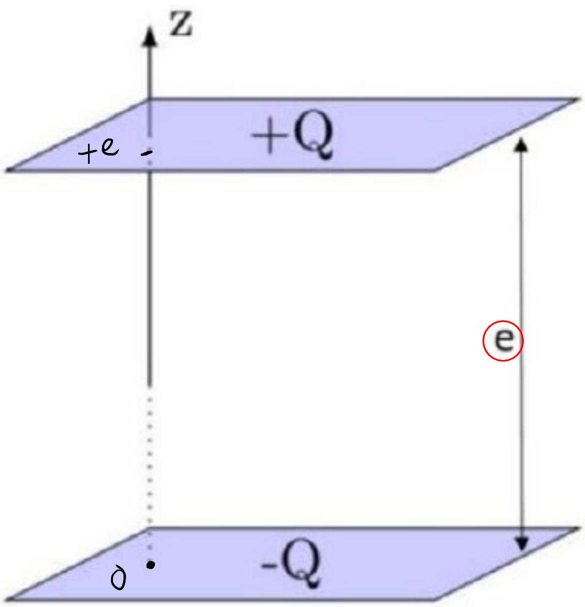
↳ C entre les plaques $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{e}$



Exercice 3 – Condensateur plan

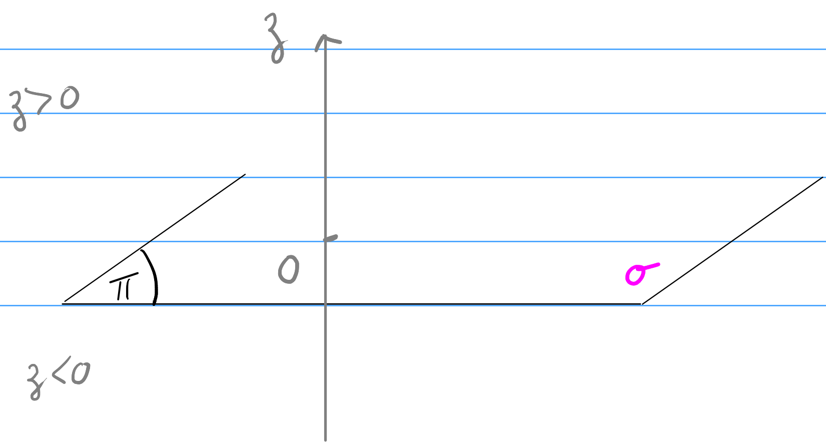
Un condensateur plan, placé dans le vide (ε_0), est constitué de deux armatures conductrices planes de surface S, parallèles entre elles, et séparées d'une distance e l'une de l'autre.
Dans cette étude, on se place dans l'approximation d'un condensateur plan infini.

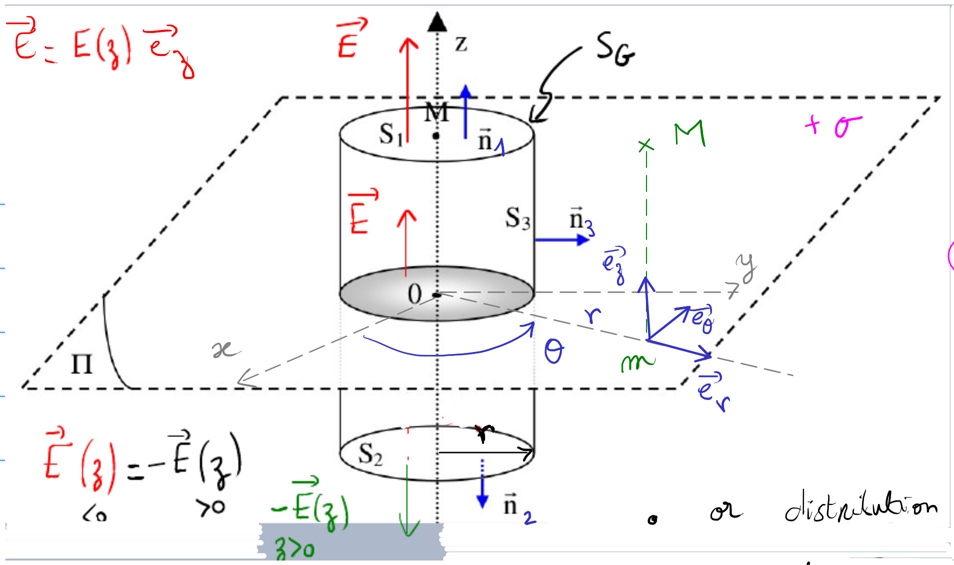
↳ plan ∞ : $\vec{E}$ et V pour un plan infini connus



choix de l'origine du système de coordonnées cylindriques : O sur la plaque du bas

1/ En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ crée par un plan Π infini chargé avec une densité de charge surfacique uniforme $(+\sigma)$.





⓪ $\vec E$ défini et continu sauf à la traversée de la surface chargée

$$\vec E(z=0^+) - \vec E(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec e_z$$

① Système de coordonnées

$(O, \vec e_r, \vec e_\theta, \vec e_z)$

② Invariances

$\vec E(\cancel{r}, \cancel{\theta}, z)$ mais

• or distribution de charges invariante par rotation autour de Oz : $\vec E$ indépendant de θ

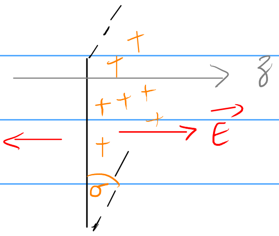
• distribution de charges invariante par translation selon $\vec e_r$: $\vec E$ ind. de r

$\vec E(z)$

③ Symétries

• $P_1 = (M, \vec e_r, \vec e_z)$, $P_2 = (M, \vec e_\theta, \vec e_z)$ $\Big\}$ $\vec E = E(z)\,\vec e_z$

• plan Π : plan d'antisymétrie pour $\vec E$:



$$\vec E(z>0) = -\vec E(z<0)$$

④ Théorème de Gauss ;

$\vec n_3 \perp \vec e_z$

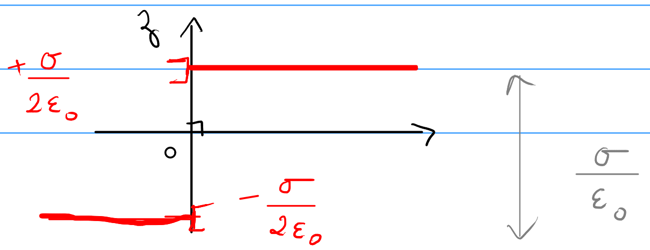
$$\Phi = \iint_S \vec E \cdot \vec{dS} = \overbrace{\iint_{S_1} \vec E \cdot \vec n \, dS}^{\Phi_1} + \overbrace{\underbrace{\iint_{S_2} \vec E \cdot \vec n \, dS}_{-\vec E(z_<)\times S}}^{\Phi_2} + \underbrace{\iint_{S_3} \vec E \cdot \vec n \, dS}_{=0} \quad \text{donc}$$

$$\Phi = E(z).S + E(-z).S + 0$$

$$= \underbrace{2ES}_{E(z>0)} \quad \text{car} \quad \vec E(-z) = -\vec E(z) \quad \text{et} \quad \vec n_2 = -\vec n_1$$

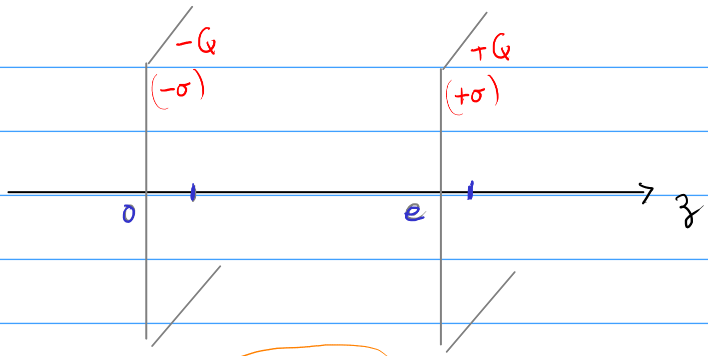
$\rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2\Phi_1 = 2E(z>0)\,S$ et $S = S_1 = S_2 = \pi r^2$

• $\Phi = 2\,S\,E(z>0) = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{S\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(z>0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$



$$\boxed{E(z<0) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

2/ Déduire le champ entre les deux armatures du condensateur en fonction de la charge surfacique $(+\sigma)$ puis en fonction de la charge totale $(+Q)$ portée par l'armature $n°1$.



$Q = +\sigma S$

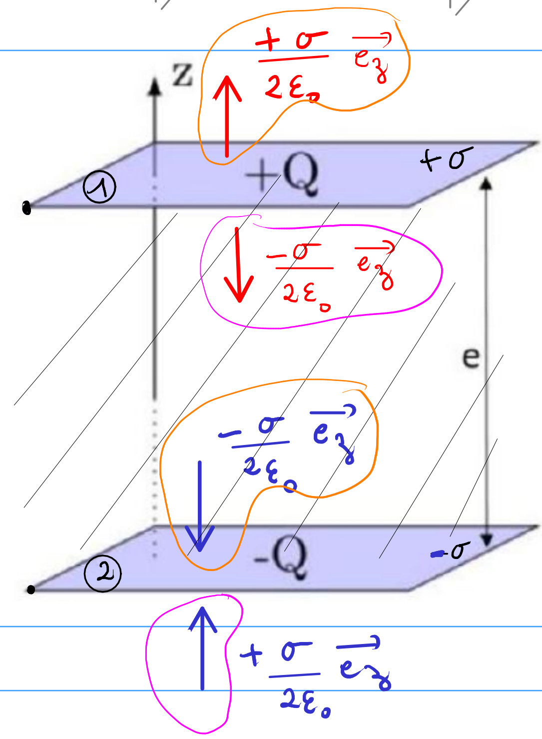
$-Q = -\sigma S$

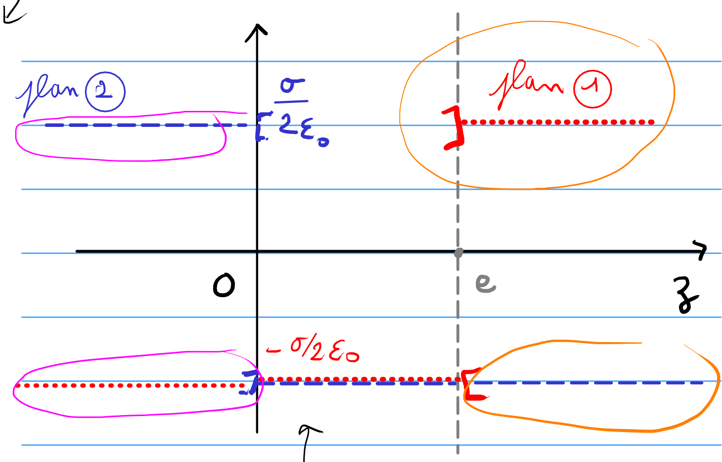
plan chargé uniformément

armature n°1

V_1 $+e$

V_2 0





<u>entre les armatures :</u> $0 < z < e$ $\quad \vec{E} = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \times 2\,\vec{e_z} = \dfrac{-\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z}$

$z > e$ $\quad \vec{E} = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} = \vec{0}$

$z < 0$: $\vec{E} = \vec{0}$

le champ est nul

or $Q = \sigma S \Rightarrow \vec{E}(0 < z < e) = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z} = \dfrac{-Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z}$

3/ En déduire la différence de potentiel $\boxed{\Delta V = V_1 - V_2}$ entre les armatures $n°1$ et $n°2$, puis la capacité C du condensateur en fonction de S, e et ε_0.

$\vec{E} = E(z)\,\vec{e_z} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\dfrac{dV}{dz}\vec{e_z} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z} \Rightarrow \boxed{\dfrac{dV}{dz} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ constante $(*)$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V(z=e) - V(z=0) \quad \text{et} \quad Q = \sigma S$$

d'après (*) , $\displaystyle\int_{V(z=0)}^{V(z=e)} dV = \int_{z=0}^{z=e} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) dz$ constante

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \left[V\right]_{V(0)=V_2}^{V(e)=V_1} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\left[z\right]_0^e = \left(\frac{\sigma e}{\varepsilon_0}\right)$$

1/C

$\hookrightarrow$ $\boxed{\Delta V = Q \dfrac{e}{\varepsilon_0 S}}$ différence de potentiel (d.d.p)

capacité : $Q = C \Delta V$ ou $\Delta V = \dfrac{Q}{C}$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}} \quad \text{ok}$$

analyse dimensionnelle : $[\Delta V] = \dfrac{[q]}{[\varepsilon_0] L} = \dfrac{[q]}{[C]}$

$$\Rightarrow [C] = [\varepsilon_0] L$$

4/ *Application numérique* :

Pendant un orage, la surface de la Terre et la surface inférieure des nuages forment, avec une assez bonne approximation, un condensateur plan. On suppose que le nuage se trouve à 1000 mètres (e) d'altitude et qu'il couvre une surface d'environ 20 km^2 = S

Quelle est la valeur de la capacité du condensateur formé par le système «Terre – Nuage » ?

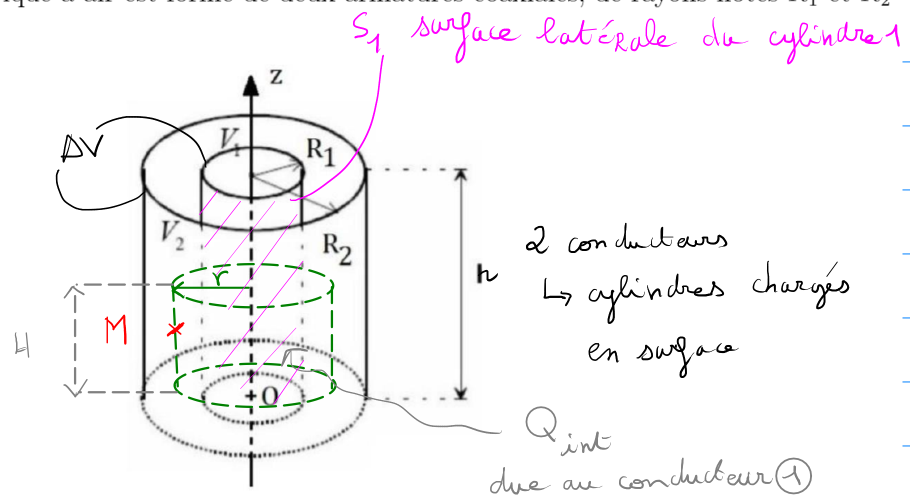
Données : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} SI$

$e = 10^3\ m$, $S = 20\ km^2 = 20 \times (10^3)^2\ m^2 = 2 \times 10^7\ m^2$

$$C = \left(\frac{\varepsilon_0 S}{e}\right) = \frac{(8{,}85 \times 10^{-12}) \times 2 \times 10^7}{10^3} = 17{,}70 \times 10^{-8}\ F$$
$$= 177 \times 10^{-9}\ F = 177\ nF$$

Exercice 4 – Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique à air est formé de deux armatures coaxiales, de rayons notés R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$.



1/ On suppose ici que ce conducteur est de longueur infinie. Déterminer $\vec{E}$ en un point M situé à la distance r de l'axe, avec $R_1 < r < R_2$.

Théorème de Gauss : surface de Gauss Σ_G = cylindre de même axe Oz, de rayon r et de hauteur H

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r \text{ radial}$$

$$\vec{dS} = dS_r\,\vec{e}_r + \dots$$

$$dS_r = r\,d\theta\,dz$$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} E(r)\,r\,d\theta\,dz = E(r)\,r\,2\pi H = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 H\, r}\,\vec{e}_r}$$

2/ En déduire l'expression de la capacité C de ce condensateur. A.N. : $R_2 = 20$ cm, $R_1 = 10$ cm et $h = 50$ cm.

$R_1 < r < R_2$, $H = h$ donc $Q_{int} = Q$ charge sur le cylindre 1

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V = -\frac{dV}{dr}\,\vec{e}_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h\, r}\,\vec{e}_r$$

constant

$$V(R_1) - V(R_2) = \Delta V = -\int_{V(R_1)}^{V(R_2)} dV = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\,\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\Big[\ln r\Big]_{R_1}^{R_2}$$

capacité : $Q = C\,\Delta V$ par définition $\Rightarrow \Delta V = Q/C$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \underbrace{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}_{1/C} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} \text{ capacité}$$

A.N. : $C = \dfrac{2\pi \times (8{,}5\times 10^{-12}) \times 0{,}5}{\ln\left(\frac{20}{10}\right)} \simeq 38{,}5 \times 10^{-12}\,F = 38{,}5\,pF$

3/ Que devient l'expression de la capacité C lorsque les rayons sont voisins c-à-d : $R_2 - R_1 = e \ll R_1$.

$\ll 1$

$$R_2 = R_1 + e \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 1 + \left(\frac{e}{R_1}\right)$$

à l'ordre 1 en $\dfrac{e}{R_1}$: $\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) \simeq \dfrac{e}{R_1}$ donc

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\left(\frac{e}{R_1}\right)} = \frac{\varepsilon_0 \overbrace{2\pi R_1 h}^{S_1}}{e} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 S_1}{e}}$$