TD : Applications linéaires

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, montrer que f est linéaire puis déterminer son noyau et son image.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 2x + y$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y, x + z)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2z, -x + 4y + 10z, 2x + y + 7z)$.

Exercice 2

Soient $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

1. Démontrer qu"il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que :

$$f(e_1) = 2e_1+e_3, f(e_2) = -e_2+e_4, f(e_3) = e_1+2e_3, f(e_4) = e_2-e_4$$

2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y) & \mapsto & (2x - y, x + y) \end{array}$$

1. f est-elle linéaire ?
2. Prouver que $f \circ f = 3(f - Id)$. En déduire que f est inversible et calculer f^{-1}.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E, tel que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E, tels que $f \circ g = g \circ f$.
On dit que F, sous-espace vectoriel de E, est stable par f si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire que pour $x \in F$, $f(x) \in F$.

1. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.
2. Montrer que $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 6
Soit $n \geqslant 1$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application défnie par

$$f(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que $\ker(f) = \mathbb{R}_0[X]$ l'ensemble des polynômes constants.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défni par

$$f(e_1) = e_2, \qquad f(e_2) = e_3, \qquad f(e_3) = e_1$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $f^3 := f \circ f \circ f = Id$.
3. Démontrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8
Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul, tel que $\ker(f) = Vect\{a\}$.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.
   (a) Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = Vect\{(4; 3; 1), (4; 4; 0)\}$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Im}(f) = Vect\{b, c\}$.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 9
Soit E un espace vectoriel. On appelle projecteur de E tout endomorphisme f de E tel que $f \circ f = f^2 = f$.

1. Montrer que, si f est un projecteur de E, alors $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
2. Montrer que pour f projecteur de E, on a : $\mathrm{Im}(f) = \{x \in E; u(x) = x\}$.
3. Soit f un endomorphisme quelconque de E.
   (a) Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

(b) Montrer alors que :

$$(E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)) \iff (\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f))$$

et

$$\ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\} \iff (\ker(f) = \ker(f^2))$$

4. Soit f un endomorphisme de E tel que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$. $f$est-il un projecteur ? Justifer.

Exercice 10

1. Soit E un espace vectoriel et $f \in Ł(E)$ tel que $f \circ f = Id$. On pose $E_1 = \ker(f - Id)$ et $E_2 = \ker(f + Id)$.
   Montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$.
2. Réciproquement, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.
   Construire un endomorphisme u de E tel que $F = \ker(u - Id)$, $G = \ker(u + Id)$ et $u \circ u = Id$.