CY Tech

TD Algèbre

Applications.

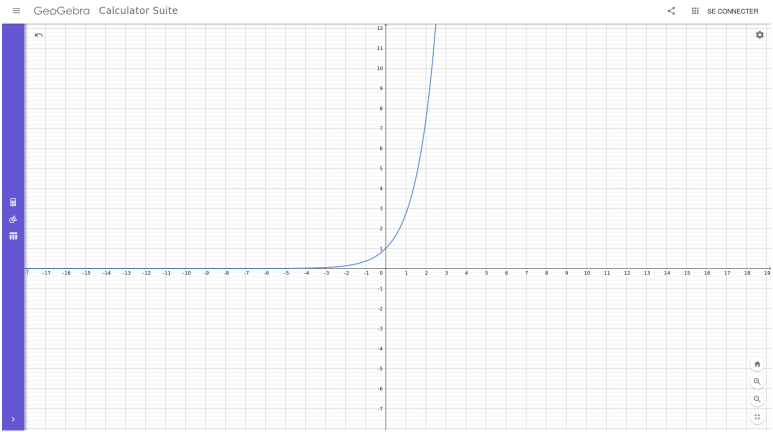
Exercice 1

Déterminer $f(\mathbb{R}_+)$, $f(\mathbb{R}_-)$, $f(\{-1\})$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$, $f^{-1}(\{-1\})$ pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \ln(x)$
3. $f(x) = \cos(x)$

Exercice 1

Étudions
$$f(x) = e^x.$$
Rappelons que la fonction $x \longmapsto e^x$ à par **ensemble de départ**, l'ensemble $\mathbb{R}$ et par **image**, l'ensemble $\mathbb{R}_+^\times$. C'est une fonction **strictement croissante** de graphe donné par



Exercice 1

Ce qui nous permet de conclure

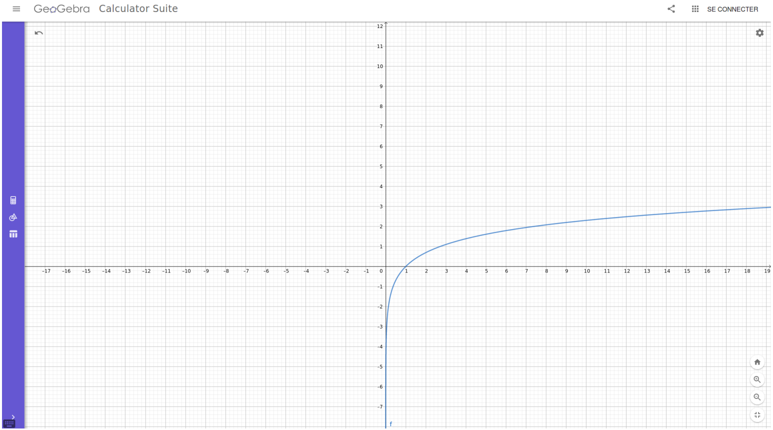
$$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\quad ; \quad f(\mathbb{R}_-) =]0, 1] \quad ; \quad f(\{-1\}) = \{f(-1)\} = \{e^{-1}\}$$

et

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R} \quad ; \quad f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \emptyset \quad ; \quad f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$$

Exercice 1

Étudions
$$f(x) = \ln(x).$$
Rappelons que la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ à par **ensemble de départ**, l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ et par **image**, l'ensemble $\mathbb{R}$. C'est une fonction **strictement croissante** de graphe donné par



Exercice 1

Ce qui nous permet de conclure

$$f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R} \quad ; \quad f(\mathbb{R}_-) = \emptyset \quad ; \quad f(\{-1\}) = \emptyset$$

et

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\quad ; \quad f^{-1}(\mathbb{R}_-) =]0, 1].$$

Finalement, puisque

$$\ln\left(e^{-1}\right) = -1$$

et ln est une fonction strictement croissant, on conclut

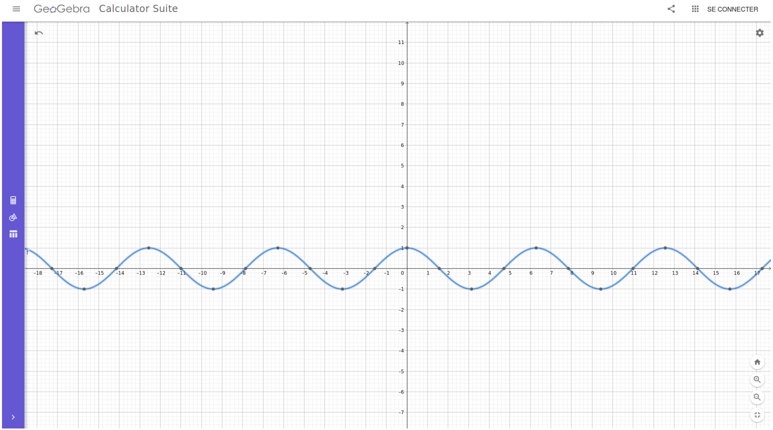
$$f^{-1}(\{-1\}) = \{e^{-1}\}.$$

A faire chez soi - Exercice 1

Étudions

$$f(x) = \cos(x).$$

Rappelons que la fonction $\cos(x)$ à par **ensemble de départ**, l'ensemble $\mathbb{R}$ et par **image**, l'ensemble $[-1, 1]$. C'est une application **périodique** de période 2π. Son graphe est donné par



A faire chez soi - Exercice 1

Ce qui nous permet de conclure

$$f(\mathbb{R}_+) = [-1,1] \quad ; \quad f(\mathbb{R}_-) = [-1,1] \quad ; \quad f(\{-1\}) = \{f(-1)\} = \{\cos(-1)\}$$

De même

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + 2k\pi \quad \text{et} \quad f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] + 2k\pi$$

et

$$f^{-1}(\{-1\}) = \{\pi + 2k\pi\}.$$

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants :

$$f([-3;-1]) \quad ; \quad f([-2;1])$$

   et

$$f([-3;-1] \cup [-2;1]) \quad ; \quad f([-3;-1] \cap [-2;1]).$$

   Les comparer.

2. Mêmes questions pour les ensembles :

$$f^{-1}(]-\infty;2]) \quad ; \quad f^{-1}([1;+\infty[)$$

   et

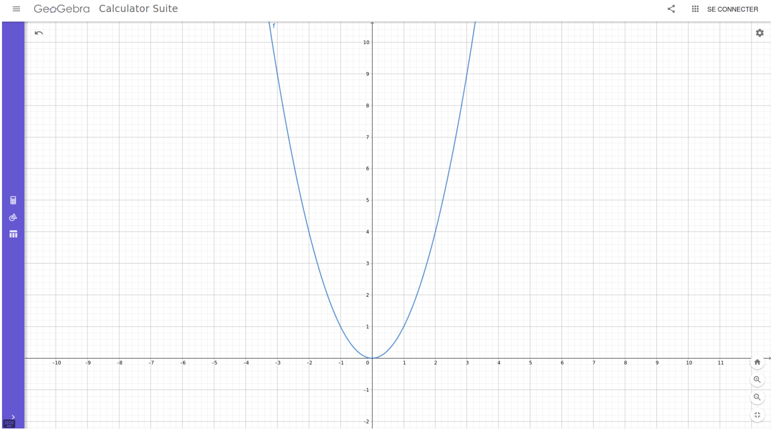
$$f^{-1}(]-\infty;2] \cup [1;+\infty[) \quad ; \quad f^{-1}(]-\infty;2] \cap [1;+\infty[).$$

Exercice 2

Étudions

$$f(x) = x^2.$$

L'application $x \longmapsto x^2$ à par **ensemble de départ**, l'ensemble $\mathbb{R}$ et par **image**, l'ensemble $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction **paire**, de graphe donné par



Exercice 2

Ce qui nous permet de conclure

$$f([-3,-1]) = [1,9] \quad ; \quad f([-2,1]) = [0,4]$$

De même

$$f([-3,-1] \cup [-2,1]) = f([-3,1]) = [0,9].$$

Notons que

$$\begin{aligned} f([-3,-1] \cup [-2,1]) &= [0,9] \\ &= [1,9] \cup [0,4] \\ &= f([-3,-1]) \cup f([-2,1]). \end{aligned}$$

Finalement

$$f([-3,-1] \cap [-2,1]) \;=\; f([-2,-1]) \;=\; [1,4].$$

On fait noter que

$$\begin{aligned} f([-3,-1] \cap [-2,1]) &= [1,4] \\ &= [1,9] \cap [0,4] \\ &= f([-3,-1]) \cap f([-2,1]). \end{aligned}$$

Exercice 2

Maintenant

$$f^{-1}(]-\infty,2]) \;=\; f^{-1}([0,2]) \;=\; [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

et

$$f^{-1}([1,+\infty[) \;=\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[.$$

De même

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,2]\cup[1,+\infty[) &= f^{-1}(\mathbb{R}) \\ &= \mathbb{R} \\ &= [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \;\cup\; (]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[) \\ &= f^{-1}(]-\infty,2])\cup f^{-1}([1,+\infty[). \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,2] \;\cap\; [1,+\infty[) &= f^{-1}([1,2]) \\ &= [-\sqrt{2},-1] \;\cup\; [1,\sqrt{2}] \\ &= [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \;\cap\; (]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[) \\ &= f^{-1}(]-\infty,2[) \;\cap\; f^{-1}([1,+\infty[). \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \min\{x^2, 3\}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}) \quad ; \quad f([0,1) \quad ; \quad f([1,2]) \quad ; \quad f([2,+\infty[)$$

et

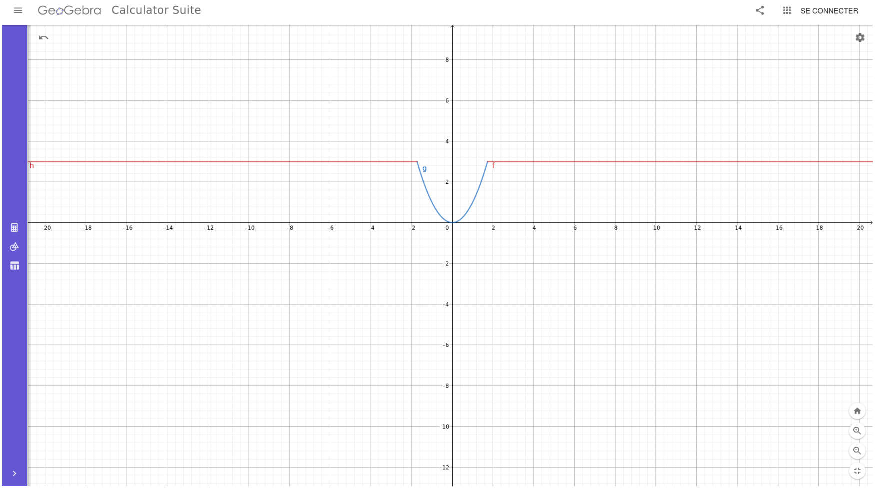
$$f^{-1}([0;1]) \quad ; \quad f^{-1}([4;+\infty[).$$

Avant de déterminer les ensembles, notons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\min\{x^2, 3\} = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \\ 3 & \text{si} \quad x > \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x < -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Exercice 3

Le graphe de la fonction f est donné donc par



Exercice 3

En sachant cela, déterminons les ensembles demandés. On a :

$$f(\mathbb{R}) = [0, 3] \quad ; \quad f([0, 1]) = [0, 1] \quad ; \quad f([1, 2]) = [1, 3]$$

et

$$f([2, +\infty[) = \{3\}.$$

De même

$$f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1] \quad ; \quad f^{-1}([4; +\infty[) = \emptyset.$$

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

(1) $n \mapsto n+1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(2) $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

(3) $(x; y) \mapsto (1; x-y; y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

(4) $(x; y; z) \mapsto (x+y+z; x-y-z; x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

(5) $(x; y) \mapsto (x+y; xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(6) $n \mapsto n+1$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

(7) $(x; y) \mapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(8) $(x; y) \mapsto (x; xy - y^3)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Solution :

(1)

$$f : n \longmapsto n+1$$

de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

- **Injective :** Oui. En effet, pour tout couple $n \in \mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$ on a

$$f(n) = f(n') \quad \Longrightarrow \quad n+1 = n'+1 \quad \Longrightarrow \quad n = n'.$$

- **Surjective :** Non car 0 n'a pas d'antécédents. En effet, si $f(n) = 0$ alors $n+1 = 0$. Ce qui implique que $n = -1$, mais $n \in \mathbb{N}$. Donc $f(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

(2)

$$f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$$

de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

- **Injective :** Oui. En effet, pour tout couple $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') \implies \frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1} &\implies (x+1)(x'-1) = (x'+1)(x-1) \\ &\implies xx' - x + x' = xx' + x - x' \\ &\implies -x + x' = x - x' \\ &\implies 2x = 2x' \implies x = x'. \end{aligned}$$

- **Surjective :** Non, car 1 n'a pas d'antécédents. En effet, s'il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $f(x) = 1$, alors

$$f(x) = 1 \implies \frac{x+1}{x-1} = 1 \implies x+1 = x-1 \implies 0 = 2.$$

Contradiction ! Donc 1 n'a pas d'antécédent.

Exercice 4

(3)

$$f : (x, y) \longmapsto (1, x - y, y)$$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

- **Injective :** Oui. En effet, pour toute couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}(1, x - y, y) = (1, x' - y', y') &\Longrightarrow x - y = x' - y' \text{ et } y = y' \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ et } y = y' \\ &\Longrightarrow (x, y) = (x', y').\end{aligned}$$

- **Surjective :** Non, car tout élément de la forme (a, b, c) avec $a \neq 1$ n'a pas d'antécédents.

Exercice 4

(4)

$$f : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y - z, x)$$

de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

- **Injective :** Non. En effet, nous avons par example pour toute couple de la forme

$$(0, y, -y) \in \mathbb{R}^3 \;\text{ et }\; (0, y', -y') \in \mathbb{R}^3, \quad \text{avec } y \neq y',$$

l'égalité

$$(y - y, -y + y, 0) = (0, 0, 0) = (y' - y', -y' + y', 0).$$

- **Surjective :** Non. Notons d'abord que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned} & (x + y + z, x - y - z, x) = (a, b, c) \\ \iff \quad & x + y + z = a \; ; \; x - y - z = b \; ; \; x = c. \\ \iff \quad & y + z = (a - c) \; ; \; y + z = -(b - c) \; ; \; x = c. \end{aligned}$$

Ainsi, si $(a - c) \neq -(b - c)$, le système ne possède pas de solution, et (a, b, c) ne possède pas d'antécédents.

Exercice 4

Par exemple, $(0,1,1)$ n'a pas d'antécédent. En effet, si $f(x,y,z) = (0,1,1)$ alors

$$(x+y+z, x-y-z, x) = (0,1,1).$$

Ceci implique que

$$x = 1 \quad ; \quad 1+y+z = 0 \quad ; \quad 1-y-z = 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 = y+z = -1.$$

Ce qui est absurde. Donc $(0,1,1)$ n'a pas d'antécédents.

Exercice 4

(5)

$$(x, y) \longmapsto (x + y, xy)$$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

- **Injective :** Non. En effet, nous avons par example pour toute couple de la forme $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(b, a) \in \mathbb{R}^2$, l'égalité

$$(a + b, a \cdot b) = (b + a, b \cdot a).$$

- **Surjective :** Non. Notons d'abord que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}(x + y, xy) = (a, b) \quad &\Longleftrightarrow \quad x + y = a \ \text{ et } \ xy = b \\ &\Longleftrightarrow \quad y = a - x \ \text{ et } \ x(a - x) = b \\ &\Longleftrightarrow \quad y = a - x \ \text{ et } \ x^2 - ax + b = 0.\end{aligned}$$

  C'est-à-dire (a, b) a un antécédent si et seulement si le polynome $x^2 - ax + b$ possède une racine réel. Ceci implique, par exemple, que l'élémént $(0, 1)$ ne possède pas d'antécédents.

Exercice 4

(6)

$$f : n \longmapsto n+1$$

de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

- **Injective :** Oui. En effet, pour toute couple $n \in \mathbb{Z}$, $n' \in \mathbb{Z}$ on a

$$f(n) = f(n') \quad \Longrightarrow \quad n+1 = n'+1 \quad \Longrightarrow \quad n = n'.$$

- **Surjective :** Oui. En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$(n-1)+1 = n \quad \Longrightarrow \quad f(n-1) = (n-1)+1 = n.$$

Ceci entraîne que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n-1$ est l'unique antécédent de n. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ il existe un antécédent. f est donc bijective.

Exercice 4

(7)

$$f : (x, y) \longmapsto 2y$$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

- **Injective :** Non. En effet, pour toute couple de la forme $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq x'$, on a

$$f(x, y) = 2y = f(x', y).$$

  Par exemple $f(1, 2) = 4$ et $f(3, 2) = 4$, mais $(1, 2) \neq (3, 2)$.

- **Surjective :** Oui. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$y = 2 \cdot \frac{y}{2} \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x, \frac{y}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y}{2} = y.$$

  Ceci entraîne que pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe au moins un antécédent.

Exercice 4

(8)

$$(x; y) \longmapsto (x; xy - y^3)$$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

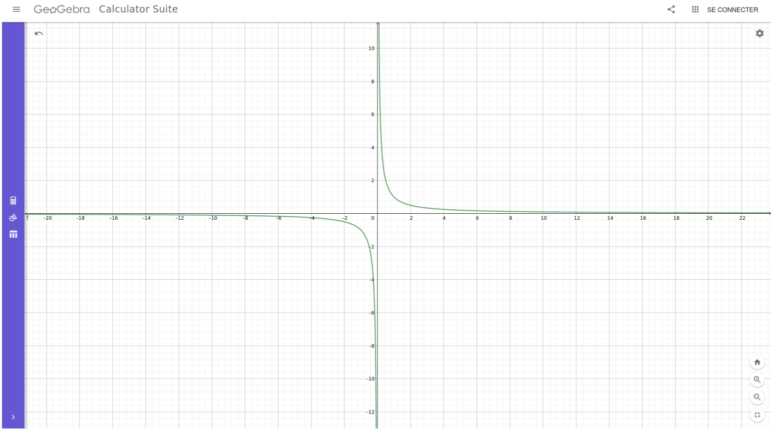
- **Injective :** À vous de vérifier.
- **Surjective :** À vous de vérifier.

Exercice 5

Soit

$$f : A_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

(a) **Tracer la courbe représentative de f_1 :**



Exercice 5

(b) Dire si f_1 est injective, surjective, bijective :

- **Injective** : Oui. En, effet pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nous avons

$$f_1(x) = f_1(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

- **Surjective** : Non. En effet, 0 n'a pas d'antécédents.

(c) Si f_1 n'est pas bijective, déterminer des ensembles E_1 et F_1 tels que f_1 soit une bijection de E_1 sur F_1 :

Solution : Puisque l'image de f_1 est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, **il suffit de prendre :**

$$E_1 = F_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Exercice 5

(d) Déterminer les ensembles $f_1(A_1)$, $f_1(]0;2])$, $f_1^{-1}(]-1,1[)$.

Solution : Nous avons

$$f_1(A_1) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ; \quad f_1(]0,2]) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

et ;

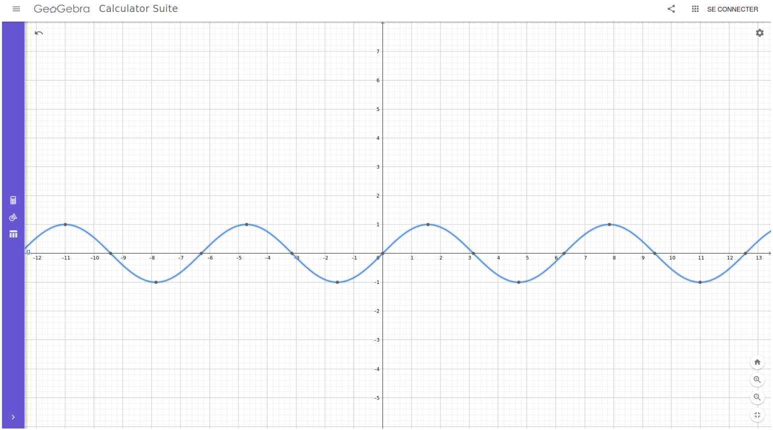
$$f_1^{-1}(]-1,1[) \; = \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[.$$

Exercice 5

Soit

$$f_2 : A_2 = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin(x).$$

(a) **Tracer la courbe représentative de f_2 :**



Exercice 5

(b) Dire si f_2 est injective, surjective, bijective :

- **Injective** : Non. En effet, la fonction sinus est une fonction périodique de période 2π.
- **Surjective** : Non. En effet, tout réel dans $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ n'a pas d'antécédents.

(c) Si f_2 n'est pas bijective, déterminer des ensembles E_2 et F_2 tels que f_2 soit une bijection de E_2 sur F_2.

Solution : Nous pouvons par exemple prendre :

$$E_2 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad F_2 = [-1, 1].$$

Exercice 5

(d) Déterminer les ensembles $f_2(A_2)$, $f_2(]0;2])$, $f_2^{-1}(]-1,1[)$.

Solution : Nous avons

$$f_2(A_2) = [-1,1] \quad ; \quad f_2(]0,2]) =]0,1]$$

et

$$f_2^{-1}(]-1,1[) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ k\pi.$$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de chacune des applications suivantes :

$$f_2 \circ f_1 \quad \text{et} \quad f_1 \circ f_2.$$

Solution :

- $f_2 \circ f_1$: Nous avons

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc

$$f_2 \circ f_1 : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, l'ensemble de définition de $f_2 \circ f_1$ est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $f_1 \circ f_2$: Nous avons

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(\sin(x)) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Donc

$$f_1 \circ f_2 : x \longmapsto \frac{1}{\sin(x)}.$$

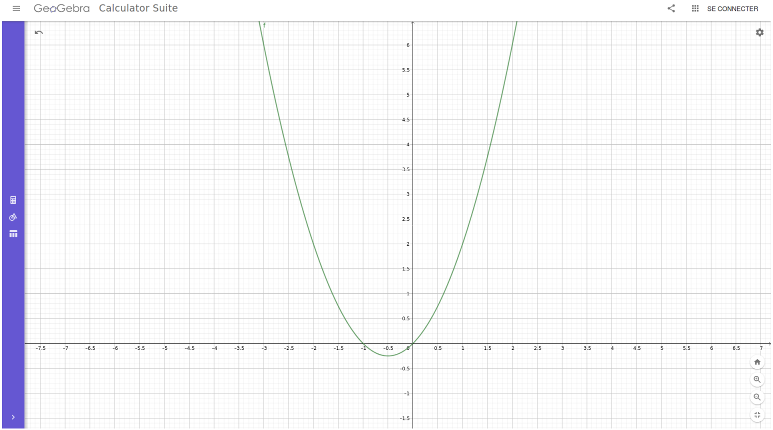
Puisque $\sin(x) = 0$ si et seulement si $x = k\pi$, on conclut que l'ensemble de définition de $f_1 \circ f_2$ est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

À faire chez soi - Exercice 5

Soit

$$f_3 : A_3 = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 + x.$$

(a) **Tracer la courbe représentative de f_2 :**



À faire chez soi - Exercice 5

(b) Dire si f_3 est injective, surjective, bijective :

- **Injective** : Non. En effet
$$f_3(0) = 0 = f_3(-1).$$
- **Surjective** : Non. Pour voir cela, notons que l'axe de symétrie de la parabole c'est
$$x = -\frac{1}{2}.$$
(Rappelons que l'axe de symétrie de $ax^2 + bx + c$ c'est $x = \frac{-b}{2a}$.)
Ceci implique que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_3(x) \ \geq \ f_3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ = \ -\frac{1}{4}$$
Par conséquent, tout réel plus petit que $-\frac{1}{4}$ n'a pas d'antécédents et
$$\mathrm{Im}(x^2 + x) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[.$$

À faire chez soi - Exercice 5

(c) Si f_3 n'est pas bijective, déterminer des ensembles E_3 et F_3 tels que f_3 soit une bijection de E_3 sur F_3.

Solution : Puisque l'axe de symétrie de la parabole c'est $x = -\frac{1}{2}$ et l'image de f_3 c'est $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$, **il suffit de prendre :**

$$E_3 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad \text{et} \quad F_3 = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[.$$

À faire chez soi - Exercice 5

(d) Déterminer les ensembles $f_3(\mathbb{R})$, $f_3([0;2])$, $f_3^{-1}(]-1,1[)$.

Solution : Nous avons

$$f_3(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[\quad ; \quad f_3(]0,2]) =]0,6]\,.$$

Pour trouver $f_3^{-1}(]-1,1[)$, notons que

$$\begin{aligned} x \in f_3^{-1}(]-1,1[) \iff f_3(x) \in]-1,1[\quad &\iff \quad -1 < f_3(x) < 1 \\ &\iff \quad -1 < x^2 + x < 1. \end{aligned}$$

Maintenant

$$-1 < x^2 + x < 1 \quad \text{si et seulement si} \quad x \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

Par conséquent

$$f_3^{-1}(]-1,1[) \ = \ \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

Exercice 6

Soit $f : E \to F$ l'application définie par

$$f(x) = |1+x| + |1-x| - 2.$$

(1) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$.

1. Étant donné un réel x_0, comparer $f(x_0)$ et $f(-x_0)$. La fonction f est-elle injective ?
2. Donner les différentes expressions de f (en supprimant les valeurs absolues). Faire son graphe.
3. Déterminer $f(\mathbb{R})$. La fonction f est-elle surjective ?

(2) On suppose que $E = [1, +\infty[$ et $F = \mathbb{R}_+$. Donner l'expression de f et déterminer, si elle existe, l'application réciproque f^{-1} de F dans E.

Exercice 6

Soit $f(x) = |1 + x| + |1 - x| - 2$. On suppose que $E = F = \mathbb{R}$.

(1) **Comparer** $f(x_0)$ **et** $f(-x_0)$: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(-x_0) = |1 - x_0| + |1 - (-x_0)| - 2 &= |1 - x_0| + |1 + x_0| - 2 \\ &= |1 + x_0| + |1 - x_0| - 2 = f(x_0). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x_0) = f(-x_0)$. La application est donc paire. Ce qui implique que l'application f n'est pas injective.

(2) **Donner les différentes expressions de** f **:** Puisque f est paire, il suffit d'étudier l'application sur l'intervalle $[0, +\infty]$. Nous avons

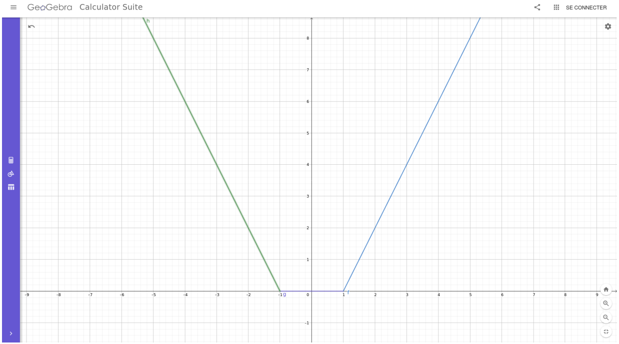
$$f(x) = \begin{cases} (1 + x) + (1 - x) - 2 = 0 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ (1 + x) - (1 - x) - 2 = 2x - 2 & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

Comme f est paire on déduit

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } \ x \leq -1 \\ 0 & \text{si } \ -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 6

Ainsi, le graphe de f est



(3) **Déterminer $f(\mathbb{R})$:** La fonction f est-elle surjective ? En regardant le graphe de f on conclut que

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+.$$

Cela entraine que l'application n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

(b) Supposons que $E = [1, +\infty[$ et $F = \mathbb{R}_+$. **Donner l'expression de f et déterminer, si elle existe, l'application réciproque f^{-1} de F dans E.**

Solution : D'après la questions précédent, l'application

$$f(x) = |1 + x| + |1 - x| - 2$$

est donnée sur $[1, +\infty[$, par

$$f(x) = 2x - 2.$$

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$y = 2x - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y+2}{2} = x.$$

Ce qui nous permet de conclure que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, y possède **un unique antécédent** donné par $\frac{y+2}{2}$. Par conséquent, f est bijective. Elle dispose donc d'une application réciproque, qui est donnée par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty] \\ y & \longmapsto & \dfrac{y+2}{2} \ (= \text{unique antécédent de y par f}). \end{array}$$

Exercice 7

On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & f(n) = 2n \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Mêmes questions pour g.
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution : Commençons par étudier la fonction $n \longmapsto f(n) = 2n$.

- **Injective :** Oui. En effet, pour tout couple $n \in \mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$ nous avons

$$f(n) = f(n') \implies 2n = 2n' \implies n = n'.$$

- **Surjective :** Non, car aucune nombre impair a d'antécédents.
- **Bijective :** Puisque elle n'est pas surjective, l'application f n'est pas bijective.

Exercice 7

Étudions la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{array}$$

- **Injective :** Non. En effet, il suffit de noter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$g(2n+1) = 2n+1 = \frac{2(2n+1)}{2} = g(4n+2).$$

- **Surjective :** Oui. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$n = \frac{2n}{2} \quad \Longrightarrow \quad n = g(2n).$$

  Ceci entraine que tout $n \in \mathbb{N}$ possède un antécédent.

- **Bijective :** Puisque elle n'est pas injective, l'application g n'est pas bijective.

Exercice 7

Déterminer

$$f \circ g \quad \text{et} \quad g \circ f.$$

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(f \circ g)(n) \;=\; f(g(n)) \;=\; 2g(n) \;=\; \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(g \circ f)(n) \;=\; g(f(n)) \;=\; g(2n) \;=\; n.$$

À faire chez soi - Exercice 8

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. On note g la restriction de f à $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$. Montrer que g est une application bijective de $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ sur $]-1;1[$.

Solution :

(1) $f(x) = \sin(\pi x)$

- **Injective :** Non. En effet, il suffit de noter que

$$f(0) = \sin(\pi \cdot 0) = \sin(0) = 0 = \sin(\pi) = \sin(\pi \cdot 1) = f(1).$$

  Donc l'application f n'est pas injective.

- **Surjective :** Oui. En effet, on sait du cours d'analyse que toute valeur de $[-1;1]$ est atteinte par la fonction sinus. Par conséquent, pour tout $y \in [-1;1]$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sin(x) = y \quad \Longrightarrow \quad y = \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{\pi}\right) = f\left(\frac{x}{\pi}\right).$$

  C'est-à-dire $\frac{x}{\pi}$ est un antécédent de y. L'application f est donc surjective.

- **Bijective :** Puisque elle n'est pas injective, l'application f n'est pas bijective.

À faire chez soi - Exercice 8

(2) Soit g la restriction de f à $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On doit montrer que g est **Bijective**. Notons que pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, l'image $g(x)$ est définit grâce à la composition

$$x \longmapsto \pi \cdot x \longmapsto \sin(\pi \cdot x) = g(x).$$

C'est-à-dire que l'application g est la composée de

$$\begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[& \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \pi \cdot x \end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow &]-1, 1[\\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Maintenant

- L'application $x \mapsto \pi \cdot x$ est bijective.
- Du cours d'analyse on sait que la application sinus est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$, en particulier elle est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-1; 1[$.

Finalement, du cours on a le résultat suivant : Soit $h : E \to F$ et $f : F \to G$. Alors

$$f \quad \text{et} \quad h \quad \text{sont bijectives} \quad \Longrightarrow \quad f \circ h \quad \text{bijective.}$$

Puisque g est la composition de deux fonctions bijectives, on conclut que la application g est bijective.

À faire chez soi - Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ l'application définie par $\frac{3x+1}{x-2}$.

1. Déterminer $f([0, 2[\cup]2, 4])$.
2. Déterminer $f^{-1}([0, 3[\cup]3, 4])$.
3. Montrer que f est une bijection et déterminer sa réciproque.

À faire chez soi - Exercice 9

Avant de répondre aux différents questions, faissons une étude de l'application

$$f : x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}.$$

On commence par notter que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ nous avons

$$\frac{3x+1}{x-2} = \frac{3x+(7-6)}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} + \frac{7}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}.$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\begin{aligned}
x,\ y \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ x < y \quad &\Longrightarrow \quad x-2 < y-2 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{y-2} < \frac{1}{x-2} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{7}{y-2} < \frac{7}{x-2} \\
&\Longrightarrow \quad 3 + \frac{7}{y-2} < 3 + \frac{7}{x-2} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{3y+1}{y-2} < \frac{3x+1}{x-2} \quad \Longrightarrow \quad f(y) < f(x).
\end{aligned}$$

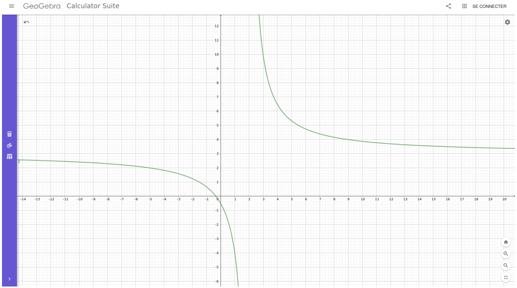
Ce qui implique que f est une fonction décroissant.

À faire chez soi - Exercice 9

En sachant cela on conclut :

- Quand x tend vers $-\infty$, f tend vers 3.
- $f(x) = 0$ si et seulement si $x = -\frac{1}{3}$.
- Quand x tend vers 2 par la gauche, f tend vers $-\infty$.
- Quand x tend vers 2 par la droite, f tend vers $+\infty$.
- Quand x tend vers $+\infty$, f tend vers 3.

Le graphe de f est donné donc par l'hyperbole



À faire chez soi - Exercice 9

Avec ceci, nous pouvons facilement répondre au questions.

1. **Déterminer** $f([0,2[\cup]2,4])$: Puisque f est décroissant, nous avons

$$
\begin{aligned}
f([0,2[\cup]2,4]) = f([0,2[) \cup f(]2,4]) &= [-\infty, f(0)[\cup]f(4), +\infty] \\
&= \left[-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{13}{2}, +\infty\right].
\end{aligned}
$$

2. **Déterminer** $f^{-1}([0,3[\cup]3,4])$: Nous avons

$$f^{-1}([0,3[\cup]3,4]) = f^{-1}([0,3[) \cup f^{-1}(]3,4]).$$

Maintenant

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}([0,3[) &\iff 0 \leq \frac{3x+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2} < 0 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \\
x \in f^{-1}(]3,4]) &\iff 3 \leq \frac{3x+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2} < 4 \iff x \in [9, +\infty[
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$f^{-1}([0,3[\cup]3,4]) = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [9, +\infty[\,.$$

À faire chez soi - Exercice 9

(3)**Montrer que f est une bijection et déterminer sa réciproque :** Pour cela notons que pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ nous avons

$$\begin{aligned} y = \frac{3x+1}{x-2} \quad &\iff \quad xy - 2y = 3x + 1 \\ &\iff \quad xy - 3x = 2y + 1 \\ &\iff \quad x = \frac{2y+1}{y-3}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure que pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, y possède un unique antécédent donné par $x = \frac{2y+1}{y-3}$. Par conséquent, f est bijective. Elle dispose donc d'une application réciproque, qui par définition est donnée par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ y \quad &\longmapsto \quad \text{unique antécédent de y par f} = \frac{2y+1}{y-3}. \end{aligned}$$

À faire chez soi - Exercice 10

On considère l'ensemble des être humains.

1. À chaque individu on lui associe ≪ sa mère ≫. Cela définit-il une application ?
2. Si oui, est-elle injective, surjective, bijective ?
3. Mêmes questions avec ≪ sa sœur ≫.

Solution :

1. Puisque chaque individu a exactement une mère (biologique) (Un individu peut ne plus avoir de mère encore vivante). L'opération

   $$\begin{array}{rcl} \text{Ensemble des être humains} & \longrightarrow & \text{Ensemble des être humains} \\ \text{Individu} & \longmapsto & \text{Mère de l'individu} \end{array}$$

   définit bien une application.
2. Elle n'est pas injective car deux individus peuvent avoir la même mère. Elle n'est pas non plus surjective car tout individu (surtout les hommes) ne sont pas forcément la mère de quelqu'un.

À faire chez soi - Exercice 10

3. Puisque il se peut que un individu ne possède pas de soeur, et s'il possède il peut avoir plusieurs, l'opération

$$\begin{aligned} \text{Ensemble des être humains} &\longrightarrow \text{Ensemble des être humains} \\ \text{Individu} &\longmapsto \text{Soeur de l'individu} \end{aligned}$$

ne définit pas une application.

Exercice 11

Soit $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F. Montrer que :

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(e) $f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap C$.

Exercice 11

(a) **Montrer**

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Solution : On raisonne par double inclusion.

- $\subset$: Montrons que

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$, tel que

$$y = f(x).$$

On a deux possibilités pour x.

- Si $x \in A$, alors

$$y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B).$$

- Si $x \in B$, alors

$$y = f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B).$$

Dans les deux cas, $y \in f(A) \cup f(B)$. Donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Exercice 11

- $\supset$: Montrons que
$$f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B).$$
Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. On a deux possibilités pour y.
  - Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$, tel que
  $$y = f(x).$$
  Or
  $$x \in A \subset A \cup B \quad \Longrightarrow \quad y \in f(A \cup B).$$
  - Si $y \in f(B)$, alors il existe $x \in B$, tel que
  $$y = f(x).$$
  Or
  $$x \in B \subset A \cup B \quad \Longrightarrow \quad y \in f(A \cup B).$$

  Dans les deux cas, $y \in f(A \cup B)$. Donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Ainsi $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.

(b) **Montrer**

$$f(A \cap B) \ \subset \ f(A) \cap f(B).$$

Solution : Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$, tel que

$$y = f(x).$$

Or

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \subset A \quad &\Longrightarrow \quad y = f(x) \in f(A), \\ x \in A \cap B \subset B \quad &\Longrightarrow \quad y = f(x) \in f(B). \end{aligned}$$

Donc $y \in f(A) \cap f(B)$. Par conséquent

$$f(A \cap B) \ \subset \ f(A) \cap f(B).$$

À faire chez soi - Exercice 11

(c) **Montrer**

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

Solution : On raisonne par double inclusion.

- $\subset$: Montrons que

$$f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

  Soit $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Alors $f(x) \in C \cup D$. On a donc deux possibilités pour $f(x)$.

  - Si $f(x) \in C$, alors

$$x \in f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

  - Si $f(x) \in D$, alors

$$x \in f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

  Dans les deux cas $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Donc

$$f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

À faire chez soi - Exercice 11

- $\supset$: Montrons que

$$f^{-1}(C \cup D) \supset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

Soit $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. On a deux possibilités pour x.

  - Si $x \in f^{-1}(C)$, alors

$$f(x) \in C \subset C \cup D \quad \Longrightarrow \quad x \in f^{-1}(C \cup D).$$

  - Si $x \in f^{-1}(D)$, alors

$$f(x) \in D \subset C \cup D \quad \Longrightarrow \quad x \in f^{-1}(C \cup D).$$

Dans les deux cas, $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Donc

$$f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D).$$

Ainsi

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

(d) **Montrer**

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

On raisonne par double inclusion.

- $\subset$: Montrons que

$$f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

Soit $x \in f^{-1}(C \cap D)$, alors $f(x) \in C \cap D$. Or

$$\begin{aligned} f(x) \in C \cap D \subset C &\implies x \in f^{-1}(C), \\ f(x) \in C \cap D \subset D &\implies x \in f^{-1}(D). \end{aligned}$$

Donc $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Ainsi

$$f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

Exercice 11

- $\supset$: Montrons que

$$f^{-1}(C \cap D) \supset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

Soit $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Alors

$$f(x) \in C \quad \text{et} \quad f(x) \in D.$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x) \in C \cap D \quad & \Longrightarrow \quad x \in f^{-1}(C \cap D) \\ & \Longrightarrow \quad f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

(e) **Montrer**

$$f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap C.$$

Solution : On raisonne par double inclusion.

- $\subset$: Montrons

$$f(A \cap f^{-1}(C)) \subset f(A) \cap C.$$

Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(C))$. Alors il existe $x \in A \cap f^{-1}(C)$, tel que

$$f(x) = y.$$

Puisque $x \in A$, on obtient $y = f(x) \in f(A)$. De même, puisque $x \in f^{-1}(C)$, on obtient $y = f(x) \in C$. Ainsi

$$y \in f(A) \cap C \quad \Longrightarrow \quad f(A \cap f^{-1}(C)) \subset f(A) \cap C.$$

Exercice 11

- $\supset$: Montrons
$$f(A \cap f^{-1}(C)) \supset f(A) \cap C.$$
Soit $y \in f(A) \cap C$. Puisque $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que
$$f(x) = y.$$
Comme on a aussi $y = f(x) \in C$,on déduit que $x \in f^{-1}(C)$. Ainsi
$$x \in A \cap f^{-1}(C).$$
D'où on conclut que
$$y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(C)) \quad \Longrightarrow \quad f(A) \cap C \subset f(A \cap f^{-1}(C)).$$
Par conséquent
$$f(A) \cap C = f(A \cap f^{-1}(C)).$$

Exercice 12

Soit $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F. Montrer que :

(a) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(b) $f(f^{-1}(C)) = f(E) \cap C$.

(c) f est injective $\Longleftrightarrow \forall A \subset E,\ A = f^{-1}(f(A))$.

(d) f est surjective $\Longleftrightarrow \forall C \subset F,\ f(f^{-1}(C)) = C$.

Exercice 12

(a) **Montrer :**

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Solution : Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$, d'où on conclut que

$$x \in f^{-1}(f(A)).$$

Exercice 12

(b) **Montrer :**

$$f(f^{-1}(C)) = f(E) \cap C.$$

Solution : On raisonne par double inclusion.

- $\subset$: Montrons

  $$f(f^{-1}(C)) \subset f(E) \cap C.$$

  Soit $y \in f(f^{-1}(C))$. Alors existe $x \in f^{-1}(C)$ tel que

  $$f(x) = y.$$

  Or $x \in f^{-1}(C)$, donc $f(x) \in C$. Ce qui implique

  $$y = f(x) \in C.$$

  Maintenant, $x \in E$ d'où $f(x) \in f(E)$. Ainsi $y \in C \cap f(E)$. Donc $f(f^{-1}(C)) \subset f(E) \cap C$.

- $\supset$: Montrons

  $$f(f^{-1}(C)) \supset f(E) \cap C.$$

  Soit $y \in f(E) \cap C$. Alors $y \in f(E)$ et $y \in C$. Puisque $y \in f(E)$, existe $x \in E$ tel que

  $$y = f(x).$$

Exercice 12

Mais $y \in C$, donc

$$y = f(x) \in C \quad \Longrightarrow \quad x \in f^{-1}(C).$$

C'est-à-dire

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(C) \quad \Longrightarrow \quad y \in f(f^{-1}(C)).$$

D'où

$$f(f^{-1}(C)) \subset f(E) \cap C$$

Finalement, puisque

$$f(f^{-1}(C)) \supset f(E) \cap C \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(C)) \subset f(E) \cap C.$$

on conclut

$$f(f^{-1}(C)) = f(E) \cap C.$$

Exercice 12

(c) **Montrer :**

$$f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \subset E,\ A = f^{-1}(f(A)).$$

Solution : On raisonne par double implication.

- $\Longrightarrow$: Montrons

$$f \text{ est injective} \quad \Longrightarrow \quad \forall A \subset E,\ A = f^{-1}(f(A)).$$

Il suffit de montrer

$$f^{-1}(f(A)) \subset A$$

(On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$). Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, alors

$$f(x) \in f(A).$$

Ainsi existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$. Mais f étant **injective**, on conclut

$$x = y \in A \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(f(A)) \subset A.$$

Par conséquent

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

Exercice 12

- $\Longleftarrow$: Montrons

$$f \text{ est injective} \quad \Longleftarrow \quad \forall A \subset E,\ A = f^{-1}(f(A)).$$

Soit $x \in E,\ y \in E$ tel que

$$f(x) = f(y).$$

Montrons $x = y$. Posons $A = \{x\}$. Alors $f(A) = \{f(x)\}$, et d'après l'hypothèse nous pouvons écrire

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}.$$

Ainsi

$$y \in \{x\} \quad \Longrightarrow \quad x = y \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est injective}.$$

Exercice 12

(d) **Montrer :**

$$f \text{ est surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall C \in F, \ f(f^{-1}(C)) = C.$$

Solution : On raisonne par double implication.

- $\Longrightarrow$: Montrons

$$f \text{ est surjective} \quad \Longrightarrow \quad \forall C \in F, \ f(f^{-1}(C)) = C.$$

Il suffit de montrer

$$C \subset f(f^{-1}(C))$$

(On sait déjà que $f(f^{-1}(C)) = f(E) \cap C \subset C$). Soit $x \in C$. Puisque f est surjective, existe $a \in E$, tel que

$$x = f(a).$$

Donc $f(a) \in C$, ce qui implique que $a \in f^{-1}(C)$. D'où on obtient que

$$x = f(a) \in f(f^{-1}(C)) \quad \Longrightarrow \quad C \subset f(f^{-1}(C))$$

Ainsi

$$C = f(f^{-1}(C))$$

Exercice 12

- $\Longleftarrow$: Montrons

$$f \text{ est surjective} \quad \Longleftarrow \quad \forall C \in F,\ f(f^{-1}(C)) = C.$$

Soit $y \in F$. Posons $C = \{y\}$. Alors d'après l'hypothèse, nous avons

$$f(f^{-1}\{y\}) = \{y\} \quad \Longrightarrow \quad f(f^{-1}(\{y\})) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset.$$

Par conséquent, tout $y \in F$ possède un antécendent. Donc f est surjective.

Exercice 13

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

(1) $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow$ g est surjective.

(2) $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow$ f est injective.

(3) $g \circ f$ est surjective et g est injective $\Longrightarrow$ f est surjective.

(4) $g \circ f$ est injective et f est surjective $\Longrightarrow$ g est injective.

Exercice 13

(1) Montrons

$$g \circ f \text{ est surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ est surjective.}$$

Soit $y \in G$. Nous voulons montrer qu'il existe $x \in F$ tel que

$$y = g(x).$$

Or $g \circ f$ est surjective, donc :

$$\exists t \in E,\ y = (g \circ f)(t).$$

Il suffit dès lors de poser : $x = f(t)$, pour avoir

$$y = g(x).$$

Ainsi, tout élément $y \in G$ possède un antécédent. Donc g est surjective.

Exercice 13

(2) Montrons

$$g \circ f \text{ est injective} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est injective.}$$

Soient $x, y \in E$. Supposons $f(x) = f(y)$. Nous voulons montrer que : $x = y$. Or

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad g \circ f(x) = g \circ f(y) \underbrace{\Longrightarrow}_{g \circ f \text{ injective}} x = y.$$

Ainsi, f est injective.

Exercice 13

(3) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrons

$$g \circ f \text{ est surjective et } g \text{ est injective} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que

$$g(y) = (g \circ f)(x) \quad \Longrightarrow \quad g(y) = g(f(x)).$$

Or g est injective, donc

$$y = f(x).$$

Par conséquent, tout $y \in F$ possède au moins un antécédent.
L'application f est donc surjective.

Exercice 13

(4) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrons

$$g \circ f \text{ est injective et } f \text{ est surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ est injective.}$$

Soient $x \in F$ et $y \in F$, tels que

$$g(x) = g(y).$$

Comme f est surjective

$$\exists a \in E,\ f(a) = x \quad \text{et} \quad \exists b \in E,\ f(b) = y.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$g(x) = g(y) \quad \Longrightarrow \quad g(f(a)) = g(f(b)) \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{g \circ f \text{ injective}} \quad a = b$$

Ainsi

$$x = f(a) = f(b) = y.$$

D'où on conclut que g est injective.

Exercice 14

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$, et $h : G \to E$ trois applications telles que $h \circ g \circ f$ injective, $g \circ f \circ h$ injective et $f \circ h \circ g$ surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Solution : D'après la question 13 points (1) et (2), nous pouvons conclure

- $$h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f \text{ est } \textbf{injective} \implies f \text{ est } \textbf{injective}.$$
- Aussi
  $$f \circ h \circ g = f \circ (h \circ g) \text{ est } \textbf{surjective} \implies f \text{ est } \textbf{surjective}.$$
  Donc f est bijective.

De même

- $$g \circ f \circ h = (g \circ f) \circ h \text{ est } \textbf{injective} \implies h \text{ est } \textbf{injective}.$$
- $$f \circ h \circ g = (f \circ h) \circ g \text{ est } \textbf{surjective} \implies f \circ h \text{ est } \textbf{surjective}.$$
  Ainsi, nous avons $f \circ h$ **surjective** et f **injective**. Donc h est **surjective** d'après la question 13 (3). D'où on déduit que h est **bijective**.

Exercice 14

Maintenant, nous avons vu en cours que

$$f \quad \text{et} \quad h \quad \textbf{injectives} \quad \Longrightarrow \quad f \circ h \quad \text{est} \quad \textbf{injective}$$

Par conséquent, $f \circ h$ est **injective** et **surjective**. Ce qui nous permet de conclure, d'après les points 13 (3) et (4) :

- $$f \circ h \circ g \quad \textbf{surjective} \quad \text{et} \quad f \circ h \quad \textbf{injective} \quad \Longrightarrow \quad g \quad \text{est} \quad \textbf{surjective}.$$

- $$g \circ f \circ h \quad \textbf{injective} \quad \text{et} \quad f \circ h \quad \textbf{surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \quad \text{est} \quad \textbf{injective}.$$

Ainsi g est **bijective**.

Exercice 15

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer l'équivalence suivante :

$$(f \text{ est } \textbf{bijective}) \iff (\forall A \subset E,\ f(A^c) = f(A)^c)$$

Solution : On raisonne par double implication. Montrons

$$(f \text{ est } \textbf{bijective}) \implies (\forall A \subset E,\ f(A^c) = f(A)^c).$$

Soit $A \subset E$. Montrons $f(A^c) = f(A)^c$. On raisonne par double inclusion.

- $\subset$: Soit $y \in f(A^c)$. Alors existe $x \in A^c = E \setminus A$, tel que

$$y = f(x).$$

Si $y \in f(A)$, alors existe $x' \in A$ tel que $y = f(x')$. Ainsi

$$f(x) = f(x') \underbrace{\implies}_{f \text{ injective}} x = x'.$$

Ce qui est **absurde** car $x \in A^c$ et $x' \in A$. Donc

$$y \in f(A)^c \implies f(A^c) \subset f(A)^c.$$

Exercice 15

- $\supset$: Soit $y \in f(A)^c$. f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que
$$y = f(x).$$
Si $x \in A$, alors
$$y = f(x) \in f(A).$$
Ce qui est **absurde** car $y \in f(A)^c$. Ainsi, $x \in A^c$, donc
$$y = f(x) \in f(A^c) \quad \Longrightarrow \quad f(A)^c \subset f(A^c).$$

Par conséquent

$$f(A^c) \subset f(A)^c \text{ et } f(A^c) \supset f(A)^c \quad \Longrightarrow \quad f(A^c) = f(A)^c.$$

Exercice 15

Soit $f : E \to F$ une application. Montrons

$$\forall A \subset E,\ f(A^c) = (f(A))^c \quad \Longrightarrow \quad (f \text{ est } \textbf{bijective})$$

- **Supposons f injective :** Soit $x, y \in E$, tel que $x \neq y$. Montrons que $f(x) \neq f(y)$. Nous avons

  $$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad y \notin \{x\} \quad \Longrightarrow \quad y \in \{x\}^c \quad \Longrightarrow \quad f(y) \in f(\{x\}^c).$$

  Or, d'après l'hypothèse, nous avons

  $$f(\{x\}^c) \ = \ (f(\{x\}))^c \ = \ \{f(x)\}^c.$$

  Donc

  $$f(y) \in \{f(x)\}^c \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y).$$

- **Supposons f surjective :** Soit $A = E$. On a

  $$\mathrm{Im}(f) \ = \ f(E) \ = \ ((f(E))^c)^c \ \underbrace{=}_{\text{Hypothèse}} \ (f(E^c))^c \ = \ (f(\emptyset))^c \ = \emptyset^c = \ F.$$

  Ainsi $\mathrm{Im}(f) = F$. Par conséquent, f est surjective.

À faire chez soi - Exercice 16

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \iff (f,\ g \text{ et } h \text{ sont bijectives})$$

Solution : On raisonne par double implication :

- $\Longleftarrow$: Montrons

  $$(f,\ g \text{ et } h \text{ sont bijectives}) \implies (g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}).$$

  Supposons $f,\ g$ et h **bijectives**. Rappelons du cours que

  $$g \quad \text{et} \quad f \quad \textbf{bijectives} \implies g \circ f \quad \text{est } \textbf{bijective}.$$

  De même

  $$h \quad \text{et} \quad g \quad \textbf{bijectives} \implies h \circ g \quad \text{est } \textbf{bijective}.$$

  Ce qui montre la proposition.

À faire chez soi - Exercice 16

- $\Longrightarrow$: Montrons

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \quad \Longrightarrow \quad (f,\ g \text{ et } h \text{ sont bijectives})$$

D'après la question 4.10 points (1) et (2), nous avons

  - $$h \circ g \ \textbf{ bijective} \quad \Longrightarrow \quad h \circ g \ \textbf{ injective} \quad \Longrightarrow \quad g \ \textbf{ injective.}$$
  - aussi

    $$g \circ f \ \textbf{ bijective} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \ \textbf{ surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \ \textbf{ surjective}.$$

    Donc g est bijective.

De même

  - $$g \circ f \ \textbf{ bijective} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \ \textbf{ injective} \quad \Longrightarrow \quad f \ \textbf{ injective}.$$
  - Nous avons aussi

    $$g \circ f \ \textbf{bijective} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \ \textbf{surjective}.$$

    De plus, comme g est **injective**, on obtient d'après la question 4.10 point (3), que f est **surjective**. Donc f est **bijective**.

Finalement

- $$h \circ g \ \ \textbf{bijective} \quad \Longrightarrow \quad h \circ g \ \ \textbf{surjective} \quad \Longrightarrow \quad h \ \ \textbf{surjective}.$$

- De plus, comme $h \circ g$ est **injective** (car **bijective**) et g est **surjective** on déduit, d'après la question 4.10 point (4), que h est **injective**. Donc h est **bijective**.

À faire chez soi - Exercice 17

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer l'implication suivante :

f est surjective $\implies$

pour tout ensemble G et toutes applications $g,\ h : F \to G, g \circ f = h \circ f \implies g = h$

Solution : Soit G un ensemble. Soient

$$g : F \to G \quad \text{et} \quad h : F \to G.$$

deux applications telles que

$$g \circ f = h \circ f.$$

Montrons que $g = h$. Soit $x \in F$. Puisque f est surjective existe $y \in E$ tel que

$$x = f(y).$$

Or

$$(g \circ f)(y) = (h \circ f)(y) \implies g(f(y)) = h(f(y)) \implies g(x) = h(x).$$

Ainsi pour tout $x \in F$ on a $g(x) = h(x)$, d'où

$$g = h.$$

À faire chez soi - Exercice supplémentaire

Soit

$$f : E \to F$$

une application. Discuter des affirmations suivantes (E et F sont de **cardinal** (**cardinal** $=$ nombre d'éléments) strictement supérieur à 1) :

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, f(x) = y.$
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, f(x) = y.$
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, f(x) = y.$
4. $\exists x \in E, \exists y \in F, f(x) = y.$
5. $\forall y \in F, \forall x \in E, f(x) = y.$
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, f(x) = y.$
8. $\exists y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$

À faire chez soi - Exercice supplémentaire

Solution :

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, f(x) = y$. **Faux.** En effet, il suffit que F possède plus d'un élément pour que la proposition soit fausse.
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, f(x) = y$. **Vrai.** Ceci découle de la définition d'une application de E vers F.
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, f(x) = y$. **Faux.** En effet, il suffit que F possède plus d'un élément pour que la proposition soit fausse.
4. $\exists x \in E, \exists y \in F, f(x) = y$. **Vrai.** Ceci découle de la définition d'une application de E vers F.
5. $\forall y \in F, \forall x \in E, f(x) = y$. **Faux.** Cette proposition est équivalent à la première proposition.
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$. **Vrai** uniquement si la application est **surjective**.
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, f(x) = y$. **Vrai** uniquement si la application est **constante.**
8. $\exists y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$. **Vrai.** Cette proposition est équivalent à la proposition quatre.

Pour aller plus loin - Exercice 18

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Déterminer $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Déterminer $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
3. Quand est-il vrai que $A\Delta(B\cap C) = (A\Delta B)\cap(A\Delta C)$?

Avant de répondre à la question, rappelons la définition de l'application indicatrice et donnons certaines de ses propriétés. Soit $A \subset E$, alors l'application indicatrice de A est

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

D'après la définition précédent on peut déduire

1. $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ si et seulement si $A = B$.Et $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
2. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.
3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$
4. $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$, où 1 dénote la fonction constante égalé à 1, i.e. pour tout $x \in E$, $1(x) = 1$.

Pour aller plus loin - Exercice 18

Déterminer $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de

$$\mathbb{1}_A \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_B.$$

Solution : Comme

$$A \setminus B = A \cap B^c,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap B^c} &= \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{B^c} \qquad \text{(D'après la propriété 2 de l'indicatrice)}\\
&= \mathbb{1}_A \cdot (1 - \mathbb{1}_B) \quad \text{(D'après la propriété 4 de l'indicatrice)}\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B\\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A\cap B}.
\end{aligned}$$

Pour aller plus loin - Exercice 18

Déterminer $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de

$$\mathbb{1}_A \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_B.$$

Solution : Comme

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\Delta B} &= \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} \\
&= \mathbb{1}_{A\cup B} - \mathbb{1}_{(A\cup B)\cap(A\cap B)} \quad \text{(D'après la question précédent)} \\
&= \mathbb{1}_{A\cup B} - \mathbb{1}_{A\cap B} \qquad (\text{car } A \cap B \subset A \cup B) \\
&= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}) - \mathbb{1}_{A\cap B} \quad \text{(D'après la propriété 3 de l'indicatrice)} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \cdot \mathbb{1}_{A\cap B} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \cdot \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B.
\end{aligned}$$

Pour aller plus loin - Exercice 18

Quand est-il vrai que

$$A\Delta(B\cap C)=(A\Delta B)\cap(A\Delta C)?$$

Solution : Puisque

$$A\Delta(B\cap C)=(A\Delta B)\cap(A\Delta C) \iff \mathbb{1}_{A\Delta(B\cap C)}=\mathbb{1}_{(A\Delta B)\cap(A\Delta C)},$$

nous allons résoudre cet exercice avec l'aide de l'application indicatrice. Notons que grâce à l'exercice 4.1 question 2 nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta(B\cap C)} &= \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_{B\cap C}-2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_{B\cap C}\\ &= \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C-2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C.\end{aligned}$$

De même, les propriétés de l'application indicatrice nous permetent d'écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\Delta B)\cap(A\Delta C)} =& \mathbb{1}_{A\Delta B}\cdot\mathbb{1}_{A\Delta C} \qquad \text{(D'après la propriété 2 de l'indicatrice)}\\ =&(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B)(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_C-2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C)\\ (\mathbb{1}_A^2=\mathbb{1}_A\Longrightarrow) =& \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C-2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C+\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C-\\ & 2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C-2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B-2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C+4\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C\\ =&\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C\end{aligned}$$

Pour aller plus loin - Exercice 18

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{1}_{A\Delta(B\cap C)} & = & \mathbb{1}_{(A\Delta B)\cap(A\Delta C)} \\
& \Longleftrightarrow & \\
\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_C - 2\cdot\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C & = & \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C \\
& \Longleftrightarrow & \\
0 & = & \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C \\
& \Longleftrightarrow & \\
0 & = & \mathbb{1}_A\cdot(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C) \\
& \Longleftrightarrow & \\
0 & = & \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_{B\Delta C} = \mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}
\end{array}$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}
A\Delta(B\cap C) = (A\Delta B)\cap(A\Delta C) &\Longleftrightarrow \mathbb{1}_{A\Delta(B\cap C)} = \mathbb{1}_{(A\Delta B)\cap(A\Delta C)} \\
&\Longleftrightarrow 0 = \mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} \Longleftrightarrow A\cap(B\Delta C) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Donc $A\Delta(B\cap C) = (A\Delta B)\cap(A\Delta C)$ si et seulement si $A\cap(B\Delta C) = \emptyset$. Ce qui est équivalent à $B\Delta C \subset A^c$.

Pour aller plus loin - Exercice 19

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} + z. \end{aligned}$$

1. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer l'image par f du cercle unité (centre 0 et rayon 1).
3. Déterminer l'image réciproque par f de $i\mathbb{R}$.

Solution :

- **Injective :** Non. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nous avons

$$z = \frac{1}{\frac{1}{z}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{z} + z = \frac{1}{z} + \frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right).$$

- **Surjective :** Notons que pour tout $a \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}^{\times}$ tel que

$$f(z) = a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{z} + z = a \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 - az + 1 = 0.$$

  D'où on conclut que les antécédents de $a \in \mathbb{C}$ par f sont les solutions de l'équation $z^2 - az + 1$. Puisque toute équation de degrée 2 possède des solution dans $\mathbb{C}$, on déduit que f est surjective.

Pour aller plus loin - Exercice 19

De plus, pour tout $a \in \mathbb{C}$ les antécédent de a par f sont

$$\frac{a+\delta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a-\delta}{2},$$

où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant

$$\Delta = a^2 - 4.$$

(2) Pour déterminer l'image par f du cercle unité on rappelle que

$$z \in \mathbb{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\ \theta \in]-\pi, \pi],\ z = e^{i\theta}.$$

Maintenant, pour tout $\theta \in]-\pi, \pi]$ nous avons

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) = (e^{i\theta})^{-1} + e^{i\theta} &= e^{-i\theta} + e^{i\theta} \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) + \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) + \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ &= 2\cos\theta. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$f(\mathbb{U}) = 2\cos(]-\pi, \pi]) = 2[-1, 1] = [-2, 2].$$

Pour aller plus loin - Exercice 19

(3) Déterminons l'image réciproque par f de $i\mathbb{R}$. Pour cela, notons que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus 0$, nous avons

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \Longrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Re}(\overline{z})}{|z|^2} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \operatorname{Re}(z) + \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2} = \operatorname{Re}(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right)$$

Ce qui nous permet conclure que

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \iff \operatorname{Re}(z)\left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = 0$$

D'où on déduit que

$$\begin{aligned} f^{-1}(i\mathbb{R}) &= \left\{z \in \mathbb{C}^\times : f(z) \in i\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{z \in \mathbb{C}^\times : \operatorname{Re}(f(z)) = 0\right\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^\times : \operatorname{Re}(z) = 0\} = i\mathbb{R}. \end{aligned}$$