TD4: Application linéaire

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?

1. $f(x\,;y\,;z) = (x - 2z\,;3z\,;x + y + z)$
2. $f(x\,;y\,;z) = (x + y\,;z\,;1 + y + z)$
3. $f(x\,;y\,;z) = (z + y\,;xy\,;x)$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, l'application φ est-elle linéaire?

1. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{[0;1]} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1) - \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$

2. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{[0;1]} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$

1. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_n & \longmapsto & (u_0\,;u_1\,;u_2) \end{array} \right.$

2. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ f & \longmapsto & \varphi(f) : x \mapsto f(x) + xf'(x) \end{array} \right.$
   où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & R_P \end{array} \right.$
   où R_P est le reste de la division euclidienne du polynôme P par $X^2 + 1$.

Exercice 3

Vérifier que les applications suivantes sont linéaires et en déterminer le noyau et l'image.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (4x\,;y - x\,;2x + y) \end{array} \right.$

2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (2x + y - z\,;x - y) \end{array} \right.$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x\,,y\,,z) = (2x\,;2y\,;0)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Est-elle surjective?
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que: $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}\left(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)\right)$.
3. Montrer que si $f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E = 0$ alors f est inversible. Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et Id_E.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

1. Vérifier que f est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7

Pour chaque application, dire si elle est linéaire. Si oui, déterminer son noyau et son image, déduire si elle est injective, surjective, bijective.

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y,z) = (xy + x - z, x)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x,y,z) = (x + y + z, 2x + y, 2x + z)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x,y,z) = (y - z, z - x, x - y)$.
4. $f : \mathbb{R}_5[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(P) = P(1)$.
5. $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(P) = (P(-1), P(0), P(1))$ pour $n = 2$ et $n = 3$.
6. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ donnée par $f(P) = aP + P'$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est $(e_1\,; e_2\,; e_3)$. On considère l'endomorphisme f défini par

$$f(e_1) = e_2 + e_3 \quad ; \quad f(e_2) = e_3 + e_1 \quad ; \quad f(e_3) = e_1 + e_2$$

Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$ dans la base $(e_1\,; e_2\,; e_3)$.
2. L'application f est elle un automorphisme de E?

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On considère l'application définie par:

$$f: \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x;y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

1. Vérifier que f est linéaire, en déterminer l'image et le noyau.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $F \cap G$ sont isomorphes.
3. Que donne alors le théorème du rang?

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Monter que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 12

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \mathrm{Vect}((1\,;0\,;0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1\,;1\,;0)\,;(1\,;1\,;1))$. Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall u \in F,\ f(u) = 2u \qquad \text{et} \qquad \forall v \in G,\ f(v) = -v$$

Déterminer cette application linéaire dans une base de votre choix puis dans la base canonique.