CY Tech

TD Algèbre

Relations.

Exercice 1

Les relations suivantes sont-elles symétriques, réflexives, transitives ?

1. sur $\mathbb{R}$, l'égalité.
2. sur $\mathbb{R}$, l'ordre strict $<$.
3. sur $\mathbb{R}$, l'ordre $\leq$.
4. sur $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même carré ».
5. sur $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même sinus ».
6. sur l'ensemble des droites du plan, le parallélisme.
7. sur l'ensemble des droites du plan, l'orthogonalité.

Exercice 1

Les relations suivantes sont-elles symétriques, réflexives, transitives ?

1. Sur $\mathbb{R}$, l'égalité.
   Solution : L'égalité est symétrique, réflexive et transitive.
2. Sur $\mathbb{R}$, l'ordre strict $<$.
   Solution : $<$ est seulement transitive.
3. Sur $\mathbb{R}$, l'ordre $\leq$.
   Solution : $\leq$ est seulement reflexive et transitive.
4. Sur $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même carré ».
   Solution : « avoir le même carré »est symétrique, réflexive et transitive.
5. Sur $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même sinus ».
   Solution : avoir le même sinus est symétrique, réflexive et transitive.
6. Sur l'ensemble des droites du plan, le parallélisme.
   Solution : le parallélisme est symétrique, réflexive et transitive.
7. Sur l'ensemble des droites du plan, l'orthogonalité.
   Solution : l'orthogonalité est seulement symétrique.

Exercice 2

Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes. Dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale et si l'ensemble admet un plus petit ou un plus grand élément.

1. Soit E un ensemble, on définit sur $\mathscr{P}(E)$:

$$A \mathscr{R} B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

2. Soit E un ensemble, on définit sur $P(E)$:

$$A \mathscr{R} B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

3. Sur $\mathbb{Z}$ on définit : $a \mathscr{R} b \Longleftrightarrow a$ et b ont la même parité.
4. Sur $\mathbb{Z}$ on définit : $a \mathscr{R} b \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ a - b = 3n$.
5. Sur $\mathbb{Z}$ on définit : $a \mathscr{R} b \Longleftrightarrow a - b$ est divisible par 3.
6. Sur $\mathbb{R}$ on définit :

$$x \mathscr{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

Exercice 2

Soit E un ensemble, on définit sur $\mathscr{P}(E)$:

$$A \mathscr{R} B \iff A \subset B.$$

Réflexive : Oui. En effet, pour tout partie A de E, nous avons $A \subset A$. Donc $A \mathscr{R} A$.

Symétrique : Non. En effet, $A \subset B$ n'implique pas $B \subset A$ (sauf si $A = B$).

Antisymétrique : Oui. En effet

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A \quad \Longrightarrow \quad A = B$$

Transitive : Oui. En effet, si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors

$$A \subset B \subset C \quad \Longrightarrow \quad A \subset C.$$

C'est donc une relation d'ordre.

Exercice 2

La relation

$$A \mathscr{R} B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

est une relation d'ordre partiel, sauf si $E = \emptyset$ ou E est un singleton (i.e. $E = \{a\}$). En effet, si $a \in E$, $b \in E$ avec $a \neq b$, alors

$$\{a\} \quad \text{et} \quad \{b\}$$

ne sont pas comparables. Le plus petit élément par rapport à l'inclusion est $\emptyset$ et le plus grand est E.

Exercice 2

Soit E un ensemble, on définit sur $\mathscr{P}(E)$:

$$A \mathscr{R} B \iff A \cap B = \emptyset.$$

Réflexive : Non. En effet, pour tout partie non vide A de E, nous avons

$$A \cap A = A \neq \emptyset.$$

Donc A n'est pas en relation avec A.

Symétrique : Oui. En effet, si $A \mathscr{R} B$ alors

$$\emptyset = A \cap B = B \cap A \quad \Longrightarrow \quad B \mathscr{R} A.$$

Antisymétrique : Non. En effet, on peut avoir

$$A \cap B = \emptyset = B \cap A,$$

sans pour autant avoir $A = B$.

Transitive : Non. En effet, $A \cap B = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $A \cap C = \emptyset$.

Exercice 2

Sur $\mathbb{Z}$ on définit :

$$a\mathscr{R}b \iff \exists n \in \mathbb{N},\ a-b=3n.$$

Réflexive : Oui. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $a-a=0=3\cdot 0$. Donc $a\mathscr{R}a$.

Symétrique : Non. En effet, si $a-b=3n$ pour $n \in \mathbb{N}$.Alors

$$b-a=-3n=3(-n).$$

Puisque $-n \notin \mathbb{N}$, on conclut que b n'est pas en relation avec a.

Antisymétrique : Oui. En effet, si

$$a-b=3\cdot\underbrace{n}_{\in\ \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad b-a=3\cdot\underbrace{n'}_{\in\ \mathbb{N}} \quad \Longrightarrow \quad 3n=-3n'$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{n}_{\in\ \mathbb{N}}=-\underbrace{n'}_{\in\ \mathbb{N}}=0.$$

Donc $a=b$.

Transitive : Oui. En effet, si $a-b=3n$ et $b-c=3n'$, alors

$$a-c=(a-b)+(b-c)=3(n+n') \quad \Longrightarrow \quad a\mathscr{R}c.$$

Exercice 2

La relation

$$a \mathscr{R} b \iff \exists n \in \mathbb{N},\ a - b = 3n.$$

est donc une relation d'ordre. Elle est une relation d'ordre partiel, par exemple 4 et 5 ne sont pas comparables. Puisque

$$a \mathscr{R} (a+3) \quad \text{et} \quad (a-3) \mathscr{R} a$$

on conclut que l'ensemble $\mathbb{Z}$ ne possède ni de minorants ni de majorant par rapport à $\mathscr{R}$. Il n'y a donc pas de plus petit ou plus grand élément.

Exercice 2

Sur $\mathbb{Z}$ on définit :

$$a\mathscr{R}b \iff a-b \text{ est divisible par } 3.$$

Notons que

$$a-b \text{ est divisible par } 3 \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ a-b=3k.$$

Donc

$$a\mathscr{R}b \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ a-b=3k.$$

Réflexive : Oui. En effet, pour tout $a\in\mathbb{R}$, nous avons

$$a-a=3\cdot 0.$$

Donc $a\mathscr{R}a$.

Symétrique : Oui. En effet, si $a-b=3k$ pour $k\in\mathbb{Z}$. Alors

$$b-a=-3k=3(-k).$$

Donc $b\mathscr{R}a$.

Exercice 2

Antisymétrique : Non. Par exemple, -3 est divisible par 3 et 3 est divisible par -3, mais $3 \neq -3$.

Transitive : Oui. En effet, si $a-b=3k$ et $b-c=3k'$, alors

$$a-c=(a-b)+(b-c)=3(k+k').$$

Donc $a\mathscr{R}c$.

La relation

$$a\mathscr{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a-b \text{ est divisible par 3.}$$

est donc une relation d'équivalence. Notons que d'après la division euclidienne, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$n=3k+r \quad \text{avec} \quad r=0 \ \text{ ou } \ r=1 \ \text{ ou } \ r=2.$$

Par conséquent, $\mathscr{R}$ possède trois classes d'équivalence :

- Les multiples de 3, qui s'écrivent 3n.
- Les nombres qui s'écrivent 3n + 1.
- Les nombres qui s'écrivent 3n + 2.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation

$$x\mathscr{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y.$$

Tout d'abord, notons que

$$x\mathscr{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x = y^2 - y.$$

Reflexive : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x^2 - x = x^2 - x \quad \Longrightarrow \quad x\mathscr{R}x.$$

Symetrique : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x^2 - x = y^2 - y \quad \Longrightarrow \quad y^2 - y = x^2 - x.$$

Donc

$$x\mathscr{R}y \quad \Longrightarrow \quad y\mathscr{R}x.$$

Transitive : Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x^2 - x = y^2 - y \quad \text{et} \quad y^2 - y = z^2 - z \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x = z^2 - z.$$

Donc

$$x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z \quad \Longrightarrow \quad x\mathscr{R}z.$$

Exercice 2

La relation

$$x\mathscr{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

est donc une relation d'équivalence. Déterminons la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
[x] &= \{y \in \mathbb{R} : x\mathscr{R}y\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad x^2 - x = y^2 - y\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 - (x - y) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad (x - y)(x + y) - (x - y) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad (x - y)(x + y - 1) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad y = x \quad \text{ou} \quad y = 1 - x\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la classe de x est constituée de deux éléments, sauf si

$$x = 1 - x \iff x = \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, la classe est donnée par $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3 (Produit cartésien)

Soit deux ensembles E et F et deux relations d'équivalences $\mathscr{R}$ sur E et $\mathscr{S}$ sur F. On définit alors sur $E \times F$ la relation :

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x\mathscr{R}x' \quad \text{et } y\mathscr{S}y'$$

Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Réflexive : Soit $(x, y) \in E \times F$. Montrons que $(x, y) \sim (x, y)$. Puisque $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont des relations d'équivalence, nous avons

$$x\mathscr{R}x \quad \text{et} \quad y\mathscr{S}y.$$

Donc $(x, y) \sim (x, y)$.

Symétrique : Soit $(x, y) \in E \times F$ et $(x', y') \in E \times F$. Supposons $(x, y) \sim (x', y')$, c'est-à-dire

$$x\mathscr{R}x' \quad \text{et} \quad y\mathscr{S}y'.$$

Puisque $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont symétriques, nous avons

$$\begin{aligned} x\mathscr{R}x' &\implies x'\mathscr{R}x \\ y\mathscr{S}y' &\implies y'\mathscr{S}y. \end{aligned}$$

Donc $(x', y') \sim (x, y)$.

Exercice 3 (Produit cartésien)

Transitive : Soient (x, y), (x', y') et (x'', y'') trois éléments de $E \times F$.
Supposons

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{et} \quad (x', y') \sim (x'', y'').$$

Donc

$$\begin{array}{ccc} x \mathscr{R} x' & \text{et} & x' \mathscr{R} x'' \\ y \mathscr{S} y' & \text{et} & y' \mathscr{S} y''. \end{array}$$

Puisque $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont transitives, nous avons

$$\begin{array}{ccccc} x \mathscr{R} x' & \text{et} & x' \mathscr{R} x'' & \Longrightarrow & x \mathscr{R} x'' \\ y \mathscr{S} y' & \text{et} & y' \mathscr{S} y'' & \Longrightarrow & y \mathscr{S} y'' \end{array}$$

Donc $(x, y) \sim (x'', y'')$.

Exercice 4

1. On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad y = x^n.$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ par
$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \quad \text{ou} \quad y \leq x'.$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.
3. Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire par
$$x \preccurlyeq y \iff f(x) \leq f(y).$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 4

On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \preccurlyeq y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad y = x^n.$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Réflexive : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$x = x^1.$$

Donc $x \preccurlyeq x$.

Antisymétrique : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, montrons $x = y$. Par hypothèse

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad y = x^n \quad \text{et} \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad x = y^m.$$

D'où

$$y = x^n = (y^m)^n = y^{mn}.$$

Si $y = 1$, on obtient $x = 1^m = 1$, donc $x = y$. Si $y \neq 1$ alors

$$y = y^{mn} \implies e^{\ln(y)} = e^{\ln(y^{mn})} \implies \ln(y) = \ln(y^{mn}) \implies \ln(y) = mn \ln(y).$$

Comme $y \neq 1$, on peut diviser par $\ln(y)$ pour obtenir $mn = 1$. D'où on conclut $m = n = 1$. Ainsi $x = y^1 = y$.

Exercice 4

Transitive : Supposons $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$, montrons $x \preccurlyeq z$. Par hypothèse

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad y = x^n \quad \text{et} \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad z = y^m.$$

D'où

$$z = y^m = (x^n)^m = x^{mn}.$$

Donc $x \preccurlyeq z$.

La relation

$$x \preccurlyeq y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad y = x^n.$$

est donc une relation d'ordre. Elle est une relation d'ordre partiel. En effet, 2 et 3 ne sont pas comparables. Si

$$2^n = 3^m \quad \Longrightarrow \quad \ln(2^n) = \ln(3^m) \quad \Longrightarrow \quad n\ln(2) = m\ln(3).$$

Ce qui implique que

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{m}{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \text{ est rationnel.}$$

Contradiction ! Donc 2 et 3 ne sont pas comparables.

Exercice 4

Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ par

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = (x', y') \quad \text{ou} \quad y \leq x'.$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Réflexive : Soit $(x, y) \in E$, alors

$$(x, y) = (x, y) \quad \Longrightarrow \quad (x, y) = (x, y) \quad \text{ou} \quad y \leq x \quad \Longrightarrow \quad (x, y) \preccurlyeq (x, y).$$

Antisymétrique : Supposons $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ et $(x', y') \preccurlyeq (x, y)$. Montrons $(x, y) = (x', y')$. Par hypothèse

$$\Big((x, y) = (x', y') \ \text{ ou } \ y \leq x'\Big) \ \text{ et } \ \Big((x', y') = (x, y) \quad \text{ou} \quad y' \leq x\Big).$$

Ce qui est équivalent à

$$(x, y) = (x', y') \ \text{ ou } \ \Big(y \leq x' \quad \text{et} \quad y' \leq x\Big).$$

Maintenant, puisque $x \leq y$ et $x' \leq y'$ (car $(x, y) \in E$ et $(x', y') \in E$) on déduit

$$\begin{aligned} x \leq y \leq x' \ \text{ et } \ x' \leq y' \leq x \quad &\Longrightarrow \quad x = x' \\ y \leq x' \leq y' \ \text{ et } \ y' \leq x \leq y \quad &\Longrightarrow \quad y = y' \end{aligned}$$

Donc $(x, y) = (x', y')$.

Exercice 4

Transitive : Supposons $(x,y) \preccurlyeq (x',y')$ et $(x',y') \preccurlyeq (x'',y'')$. Montrons $(x,y) \preccurlyeq (x'',y'')$. Par hypothèse

$$\Big((x,y) = (x',y') \;\text{ ou }\; y \leq x'\Big) \;\text{ et }\; \Big((x',y') = (x'',y'') \;\text{ ou }\; y' \leq x''\Big).$$

Ce qui est équivalent à

$$\Big((x,y) = (x',y') \;\text{ et }\; (x',y') = (x'',y'')\Big) \;\text{ ou }\; \Big((x,y) = (x',y') \;\text{ et }\; y' \leq x''\Big)$$
$$\text{ou }\; \Big((x',y') = (x'',y'') \;\text{ et }\; y \leq x'\Big) \;\text{ ou }\; \Big(y \leq x' \;\text{ et }\; y' \leq x''\Big)$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
(x,y) = (x',y') \;\text{ et }\; (x',y') = (x'',y'') \quad &\Longrightarrow \quad (x,y) = (x'',y'') \\
(x,y) = (x',y') \;\text{ et }\; y' \leq x'' \quad &\Longrightarrow \quad y = y' \leq x'' \\
(x',y') = (x'',y'') \;\text{ et }\; y \leq x' \quad &\Longrightarrow \quad y \leq x' = x'' \\
y \leq x' \;\text{ et }\; y' \leq x'' \quad &\Longrightarrow \quad y \leq x' \leq y' \leq x''.
\end{aligned}$$

Ainsi on a $(x,y) = (x'',y'')$ ou $y \leq x''$. Donc $(x,y) \preccurlyeq (x'',y'')$. Il s'agit donc d'une relation d'ordre.

Exercice 4

Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire par

$$x \preccurlyeq y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Réflexive : Soit $x \in E$, alors

$$f(x) \leq f(x).$$

Donc $x \preccurlyeq x$.

Antisymétrique : Supposons $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, montrons $x = y$. Par hypothèse

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{et} \quad f(y) \leq f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

Puisque f est injective on conclut $x = y$.

Transitive : Supposons $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$, montrons $x \preccurlyeq z$. Par hypothèse

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{et} \quad f(y) \leq f(z) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y) \leq f(z).$$

Donc $x \preccurlyeq z$.
Il s'agit d'une relation d'ordre.

Exercice 5

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation :

$$(x, y) \ll (x', y') \iff |x - x'| \leq y' - y.$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple (a, b).
3. L'ordre est-il total ?

Solution :

Réflexive : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$|x - x| = 0 \leq 0 = y - y.$$

Donc $(x, y) \ll (x, y)$.

Exercice 5

Antisymétrique : Supposons $(x,y) \ll (x',y')$ et $(x';y') \ll (x,y)$, montrons $(x,y) = (x',y')$. Par hypothèse

$$0 \leq |x - x'| \leq y' - y \quad \text{et} \quad 0 \leq |x' - x| \leq y - y' \quad \Longrightarrow \quad 0 = y' - y.$$

Donc $y = y'$. Ce qui implique que $x = x'$. Par conséquent $(x,y) = (x',y')$.

Transitive : Supposons $(x,y) \ll (x',y')$ et $(x',y') \ll (x'',y'')$, montrons $(x,y) \ll (x'',y'')$. Par hypothèse

$$|x - x'| \leq y' - y \quad \text{et} \quad |x' - x''| \leq y'' - y'$$

Maintenant

$$|x - x''| = |(x - x') + (x' - x'')|.$$

Gîace à l'inégalité triangulaire nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} |x - x''| = |(x - x') + (x' - x'')| &\leq |x - x'| + |x' - x''| \\ &\leq y' - y + y'' - y' \\ &= y'' - y. \end{aligned}$$

Donc, $(x,y) \ll (x'',y'')$.

Exercice 5

La relation

$$(x, y) \ll (x', y') \iff |x - x'| \leq y' - y.$$

est donc une relation d'ordre.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donnons une répresentation graphique de l'ensemble des majorants et des minorants de (a, b). Pour cela, soit (x, y) un majorant de (a, b). Alors

$$(a, b) \ll (x, y) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq |x - a| \leq y - b,$$

d'où

$$b - y \leq x - a \leq y - b.$$

Cela est équivalent à

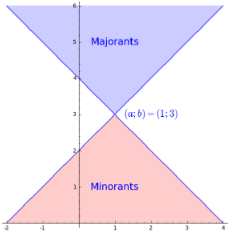
$$y \geq x + b - a \quad \text{et} \quad y \geq -x + a + b.$$

De même

$$(x, y) \ll (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad (y \leq x + b - a \quad \text{et} \quad y \leq a + b - x).$$

Exercice 5

Ce qui nous donne le suivant diagramme



Sur le diagramme, on remarque que si deux points ont la même ordonnée, ils ne pourront pas être comparé. Par exemple, $(2, 1)$ et $(5, 1)$ ne sont pas comparable car

$$|2 - 5| = |5 - 2| = 3 > 1 - 1 = 0.$$

L'ordre n'est donc pas total.

Exercice 6

Soit $n > 0$ un entier et $\equiv_n$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$a \equiv_n b \iff n \text{ divise } a - b.$$

On parle d'égalité modulo n, aussi notée $a \equiv b \mod n$ ou $a \equiv b\ [n]$.

1. Montrer que $\equiv_n$ est une relation d'équivalence.
2. Combien existe-t-il de classes d'équivalence ? Donner un système de représentants.
3. Montrer que $\equiv_n$ est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$.

Exercice 6

Sur $\mathbb{Z}$ on définit :

$$a \equiv_n b \quad \Longleftrightarrow \quad n \quad \text{divise} \quad a - b.$$

Notons que

$$n \quad \text{divise} \quad a - b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = nk.$$

Donc

$$a \equiv_n b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = nk.$$

Réflexive : Oui. En effet, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$a - a = n \cdot 0.$$

Donc $a \equiv_n a$.

Symétrique : Oui. En effet, si $a - b = nk$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$b - a = -nk = n(-k).$$

Donc $b \equiv_n a$.

Exercice 6

Transitive : Oui. En effet, si $a - b = nk$ et $b - c = nk'$, alors

$$a - c = (a - b) + (b - c) = n(k + k').$$

Donc $a \equiv_n c$.

La relation

$$a \equiv_n b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \text{ est divisible par n.}$$

est donc une relation d'équivalence.

Exercice 6

Combien existe-t-il de classes d'équivalence ? Donner un système de représentants.

Solution : Notons que d'après la division euclidienne, pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$ on a $m = nk + r$ avec $0 \leq r \leq n - 1$. Autrement dit

$$m = nk + r \quad \text{avec} \quad r = 0 \;\text{ ou }\; r = 1 \;\text{ ou }\; r = 2 \;\cdots\; \text{ ou }\; r = n - 1.$$

Ceci implique que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$m \equiv_n 0 \;\text{ ou }\; m \equiv_n 1 \;\text{ ou }\; m \equiv_n 2 \;\text{ ou }\; \cdots \;\text{ ou }\; m \equiv_n n - 1.$$

Par conséquent, $\equiv_n$ possède n classes d'équivalence :

- Les multiples de n, qui s'écrivent nk. Pour représentant de cette classe on peut choisir 0.
- Les nombres qui s'écrivent $nk + 1$. Pour représentant de cette classe on peut choisir 1.
- Les nombres qui s'écrivent $nk + 2$. Pour représentant de cette classe on peut choisir 2.

$$\vdots$$

- Les nombres qui s'écrivent $nk + n - 1$. Pour représentant de cette classe on peut choisir $n - 1$.

Exercice 6

Un système de représentants pour les classes d'équivalence de $\equiv_n$ est donné donc par

$$\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ n-1\}.$$

L'ensemble des classes d'equivalences est noté :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}\ ,\ \overline{1}\ ,\ \overline{2}\ ,\ \cdots\ ,\ \overline{n-1}\}$$

Pour aller plus loin - Exercice 6

Montrer que $\equiv_n$ est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$.

Solution :

- **Addition :** Soit $a \equiv_n b$ et $c \equiv_n d$. On doit montrer que

$$a + c \equiv_n b + d$$

Par définition, il existe k et k' tels que

$$a = nk + b \quad \text{et} \quad c = nk' + d.$$

Ainsi,

$$a + c = n(k + k') + (b + d) \quad \Longrightarrow \quad a + c \equiv_n b + d.$$

La relation $\equiv_n$ est donc compatible avec l'addition, c'est-à-dire que l'addition ne dépend pas du représentant choisit pour la classe.

Pour aller plus loin - Exercice 6

- **Multiplication :** Soit $a \equiv_n b$ et $c \equiv_n d$. On doit montrer que

$$a \cdot c \equiv_n b \cdot d$$

Par définition, il existe k et k' tels que

$$a = nk + b \quad \text{et} \quad c = nk' + d.$$

Ainsi,

$$a \cdot c = n(nkk' + kd + k'b) + bd \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c \equiv_n b \cdot d.$$

La relation $\equiv_n$ est donc compatible avec la multiplication, c'est-à-dire que la multiplication ne dépend pas du représentant choisit pour la classe.

Exercice 7

Soit X un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. Pour $x \in X$, on note $[x]$ sa classe d'équivalence. Montrer que :

1. $\forall x \in X$, $x \in [x]$.
2. $\forall (x, y) \in X^2$ on a

$$x \in [y] \iff y \in [x] \iff [x] = [y] \iff [x] \cap [y] \neq \emptyset.$$

Solution :

1. Soit $x \in X$, montrons $x \in [x]$. Comme $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, elle est reflexive. Donc $x \mathscr{R} x$, d'où

$$x \in [x].$$

2. Soit $\forall (x, y) \in X^2$, montrons

$$x \in [y] \iff y \in [x] \iff [x] = [y] \iff [x] \cap [y] \neq \emptyset.$$

Pour cela il suffit de montrer

$$x \in [y] \implies y \in [x] \implies [x] = [y] \implies [x] \cap [y] \neq \emptyset \implies x \in [y].$$

Exercice 7

Commençons par montrer l'implication

$$x \in [y] \Longrightarrow y \in [x]$$

On a

$$\begin{aligned} x \in [y] &\Longleftrightarrow y \mathscr{R} x \\ &\Longrightarrow x \mathscr{R} y \quad \textbf{(par symétrie de } \mathscr{R}\textbf{)} \\ &\Longrightarrow y \in [x]. \end{aligned}$$

Montrons maintenant

$$y \in [x] \Longrightarrow [x] = [y]$$

Soit $z \in [x]$, alors $x \mathscr{R} z$. Or $y \in [x]$, d'où $x \mathscr{R} y$. Par symétrie et transitivité de $\mathscr{R}$ nous avons

$$x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad x \mathscr{R} z \quad \Longrightarrow \quad y \mathscr{R} x \quad \text{et} \quad x \mathscr{R} z \quad \Longrightarrow \quad y \mathscr{R} z.$$

D'où $z \in [y]$ et $[x] \subset [y]$. De même, si $z \in [y]$, alors $y \mathscr{R} z$. Or $y \in [x]$, d'où $x \mathscr{R} y$. Par transitivité de $\mathscr{R}$ nous avons

$$x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z \quad \Longrightarrow \quad x \mathscr{R} z.$$

D'où $z \in [x]$ et $[y] \subset [x]$. Donc $[x] = [y]$.

Exercice 7

Pour montrer l'implication

$$[x] = [y] \Longrightarrow [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

il suffit de noter que, comme $[x] = [y]$ on déduit

$$[x] \cap [y] = [x].$$

Maintenant, puisque $\mathscr{R}$ est refléxive, on a $x\mathscr{R}x$. Donc

$$x \in [x] = [x] \cap [y] \quad \Longrightarrow \quad [x] \cap [y] \neq \emptyset.$$

Montrons finalement l'implication

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad x \in [y].$$

Soit $z \in [x] \cap [y]$. Alors $z \in [x]$ et $z \in [y]$. D'où

$$y\mathscr{R}z \quad \text{et} \quad x\mathscr{R}z \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{par symétrie de } \mathscr{R}} \quad y\mathscr{R}z \quad \text{et} \quad z\mathscr{R}x \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{par transitivité de } \mathscr{R}} \quad y\mathscr{R}x.$$

Donc $x \in [y]$.

A faire chez soi - Exercice 8

Étudier la relation $\mathscr{R}$ définie sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f\mathscr{R}g \iff \Big(\exists A>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x|>A \implies f(x)=g(x)\Big)$$

Notons que la fonction f est en relation avec g si et seulement si les deux fonctions sont égales à partir d'un certain rang (à partir de un certain moment).

Solution : Étudions les propriétés de la relation :

Réflexive : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f(x)=f(x),$$

on conclut que $f\mathscr{R}f$. En effet, il suffit de prendre n'importe quel réel $A>0$ pour avoir $f(x)=f(x)$.

Symétrique : Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que $f\mathscr{R}g$ et montrons que $g\mathscr{R}f$. Puisque $f\mathscr{R}g$, il existe $A>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|>A$ on a

$$f(x)=g(x) \implies g(x)=f(x).$$

Ce qui implique que pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|>A$ on a $g(x)=f(x)$. Donc $g\mathscr{R}f$.

A faire chez soi - Exercice 8

Antisymétrie : Soient f et g deux applications de de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que $f\mathscr{R}g$ et $g\mathscr{R}f$. C'est-à-dire, il existe $A > 0$, tel que

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ |x| > A.$$

Est-il vrai que $f = g$? Non, car même si $f = g$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| > A$, on n'a pas forcément $f = g$ sur $\mathbb{R}$. Pour voir cela il suffit de prendre, par exemple, deux fonctions qui coïncident sur $\mathbb{R}^*$ mais qui sont différentes en 0.

Transitive : Soient f, g et h trois applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons $f\mathscr{R}g$ et $g\mathscr{R}h$. Alors il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que

$$\begin{array}{llll} \text{pour tout} & |x| > A_1 & \text{on a} & f(x) = g(x) \\ \text{pour tout} & |x| > A_2 & \text{on a} & g(x) = h(x) \end{array} \quad .$$

Par conséquent, en prenant $A = \max\{A_1, A_2\}$ on conclut

$$\text{pour tout} \quad |x| > A \quad \text{on a} \quad f(x) \underbrace{=}_{|x|>A_1} g(x) \underbrace{=}_{|x|>A_2} h(x).$$

Donc $f\mathscr{R}h$.

Finalement, comme $\mathscr{R}$ est **reflexive**, **symétrique** et **transitive** on en déduit que la relation est une relation d'équivalence.

A faire chez soi - Exercice 9

Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E, réflexive et transitive. On définit la relation :

$$x \mathscr{S} y \iff (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} x)$$

La relation $\mathscr{S}$ est elle une relation d'équivalence ?

Solution :
Réflexive : Soit $x \in E$, montrons $x \mathscr{S} x$. Puisque $\mathscr{R}$ est réflexive nous avons

$$x \mathscr{R} x \quad \text{et} \quad x \mathscr{R} x$$

Donc $x \mathscr{S} x$.

Symétrique : Soient x et y deux éléments dans E. Supposons $x \mathscr{S} y$ et montrons $y \mathscr{S} x$. Puisque $x \mathscr{S} y$, nous avons

$$x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} x \implies y \mathscr{R} x \quad \text{et} \quad x \mathscr{R} y.$$

D'où $y \mathscr{S} x$.

A faire chez soi - Exercice 9

Transitive : Soient x, y et z trois éléments dans E. Supposons $x\mathscr{S}y$ et $y\mathscr{S}z$, montrons $x\mathscr{S}z$. Par hypothèse

$$\begin{aligned}(x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}x) \quad \text{et} \quad (y\mathscr{R}z \quad \text{et} \quad z\mathscr{R}y)& \\ \iff (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z) \quad \text{et} \quad (z\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}x)&\end{aligned}$$

Par transitivité de $\mathscr{R}$, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}(x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z) &\implies x\mathscr{R}z \\ (z\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}x) &\implies z\mathscr{R}x.\end{aligned}$$

d'où

$$x\mathscr{R}z \quad \text{et} \quad z\mathscr{R}x \implies x\mathscr{S}z.$$

Par conséquent, $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence.

A faire chez soi - Exercice 10

Soit $\mathscr{R}$ une relation symétrique et réflexive sur un ensemble X. On définit une relation $\mathscr{S}$ sur X par :

$$x \mathscr{S} y$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists z_0,\ \cdots\ ,\ \exists z_n \in X,\ z_0 = x,\ z_n = y,\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1,\ (z_i \mathscr{R} z_{i+1})$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence.

Réflexive : Oui. En effet, pour tout $x \in X$ il suffit de choisir

$$n = 1,\ z_0 = x,\ z_1 = x.$$

Alors comme $\mathscr{R}$ est réflexive on obtient

$$x = z_0 \mathscr{R} z_1 = x.$$

Donc $x \mathscr{S} x$.

A faire chez soi - Exercice 10

Symétrique : Oui. En effet, si $x\mathscr{S}y$ alors

$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists z_0, \cdots, \exists z_n \in X,\ z_0 = x,\ z_n = y,\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1,\ (z_i \mathscr{R} z_{i+1})$

Puisque $\mathscr{S}$ est symetrique, nous avons

$$\forall\ 0 \leq i \leq n-1,\ (z_i \mathscr{R} z_{i+1}) \quad \Longrightarrow \quad (z_{i+1} \mathscr{R} z_i)$$

Par conséquent, en définissant

$$z'_0 = y,\ z'_1 = z_{n-1}, \cdots, z'_n = x$$

on conclut

$$z'_0 = y,\ z'_n = x,\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1,\ (z'_i \mathscr{R} z'_{i+1})$$

Donc $y\mathscr{S}x$.

A faire chez soi - Exercice 10

Transitive : Oui. En effet, si $x\mathscr{S}y$ et $y\mathscr{S}w$alors

$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists z_0,\ \cdots\ ,\ \exists z_n \in X,\ z_0 = x,\ z_n = y,\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1,\ (z_i \mathscr{R} z_{i+1})$

et

$\exists m \in \mathbb{N},\ \exists t_0,\ \cdots\ ,\ \exists t_m \in X,\ t_0 = y,\ t_m = w,\ \forall\ 0 \leq i \leq m-1,\ (t_i \mathscr{R} y_{i+1})$.

Donc en posant

$$z'_0 = x,\ z'_1 = z_1,\ \cdots\ , z'_n = y = t_0,\ z'_{n+1} = t_1,\ \cdots\ ,\ z'_{n+m} = w$$

on a bien

$$z'_0 = x,\ z'_n = w,\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1,\ (z'_i \mathscr{R} z'_{i+1})$$

Donc $x\mathscr{S}w$.