TD 3 - Limites et continuité

Généralités sur les fonctions

Exercice 1. *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*
Ecrire à l'aide de quantificateurs et symboles logiques les propositions suivantes :

1. *f n'est pas constante.*
2. *2 n'est pas l'image d'un réel par f.*
3. *f prend toujours la même valeur pour des réels opposés.*
4. *Aucun réel négatif n'est égal à son image.*

Exercice 2.

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-4x^2}{2}\right)$*. Pour quelles valeurs de x les points du graphe de f d'abscisse x sont-il au dessus de l'axe des abscisses ?*

   A faire chez soi

2. *Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\cos x + 2}{x^2+1}$.*
   Est-elle bornée sur D_f (on ne cherchera pas à étudier les variations de f) ? Déterminer la position relative du graphe de f par rapport à celui de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Définition de la limite

Exercice 3. *Montrer, en revenant à la définition, que :*

1. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 \cos\dfrac{1}{x}\right) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{|x-2|} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{e^x+1} = 0.$

A faire chez soi

Exercice 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$. *Pour tout* $\epsilon > 0$ *déterminer* α *tel que,*

$$(x \neq 1/3 \quad et \quad |x| \leq \alpha) \Longrightarrow |f(x) + 3| \leq \epsilon.$$

Que peut-on en conclure ?

Propriétés des limites

Exercice 5. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *contenant* x_0 *dans son intérieur.*
On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = u > 0$.
Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ *tel que si* $0 < |x - x_0| < \alpha$ *alors* $|f(x)| \geq \frac{u}{2}$.

Exercice 6. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *périodique, qui admet une limite finie en* $+\infty$.
Montrer que f *est constante.*

Exercice 7. *Soient* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *et* $l, l' \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\lim_{x \to 0} f(x) = l$ *et* $\lim_{x \to 0} g(x) = l'$.
Montrer que

$$\lim_{x \to 0} Max(f(x), g(x)) = Max(l, l').$$

Exercice 8. *Est-il vrai que si* f *et* g *dont deux fonctions positives sur* $\mathbb{R}_+$, *et si* f *et* g *ont même limite en* $+\infty$, *alors* $\lim_{+\infty} \dfrac{f}{g} = 1$.

Exercice 9. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur* $\mathbb{R}_+$ *telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \quad et \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. *Montrer que*
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to \infty} g(x) = 0.$$
2. *Montrer que si* $L > 0$,
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty.$$

A faire chez soi

Exercice 10.

1. *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$, *telle que :* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. *Montrer la propriété suivante :*
   $(\mathcal{P}) \;\; \forall \epsilon > 0, \; \exists A \in \mathbb{R}, \; \forall x, x' \in \mathbb{R}, \; x > A$ *et* $x' > A \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$
2. *Ecrire la négation de la propriété* $(\mathcal{P})$.
3. *Montrer que la négation de* $(\mathcal{P})$ *est vraie pour la fonction* $f(x) = \sin(x)$ *(on pourra penser à prendre* $x = 2n\pi$, $x' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$*). Conclure.*
4. *Quelles sont les fonctions périodiques admettant une limite finie en* $+\infty$ *?*

Calculs de limites

Exercice 11. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-sin\,x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot E(\dfrac{1}{x})$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot E(\dfrac{1}{x})$

Exercice 12. *Déterminer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} g\,(x)$ *où* $g\,(x)=\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

Continuité

Exercice 13.

1. *Soit* f *définie par :* $\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x} & si\ x<0 \\ \dfrac{x^2+2x+3}{x^3+1} & si\ x\geq 0 \end{cases}$

   f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Soit* g *définie par :* $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & si\ x<0 \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} & si\ x>0 \end{cases}$

   Quelle valeur doit-on donner à a *pour que* g *soit prolongeable par continuité en* 0 *?*

Exercice 14. *Soit* g *la fonction définie par :* $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & si\ 0<x<1 \\ 2\ si\ x=1 & \\ \dfrac{x+1}{3x-1} & si\ x>1 \end{cases}$

La fonction g *est-elle continue en* 1 *?*

A faire chez soi

Exercice 15. *Soit f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+2} & si\ x < -1 \\ 2x+3 & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+2x+3 & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. *Représenter f.*
2. *Montrer que f est continue et strictement croissante.*
3. *Donner les formules définissant la fonction réciproque de f.*

Exercice 16. *Étudier la continuité des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ *si* $x \neq 0$ $\quad f_1(0) = 0$ *;*
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ *si* $x \neq 0$ $\quad f_2(0) = 0$ *;*
3. $f_3(x) = xE(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *;*
4. $f_4(x) = [x - E(x)]^2$ *et* $f_5(x) = E(x) + f_4(x)$.

Exercice 17. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :* $\quad f(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 \ sinon \end{cases}$
Montrez que la fonction f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 18.

1. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues en 0, qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(3x)$.*
2. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues en 1, qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(x^2)$.*

Grands théorèmes de la continuité

Exercice 19.

1. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$.*
   Montrer, par considération de $\phi(x) = f(x) - x$, qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = c$.
2. *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.*
   Montrer qu'il existe c dans $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

A faire chez soi

3. *Un mobile parcourt, à vitesse continue, une distance d en une unité de temps.*
   Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

Exercice 20. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Trouvez les fonctions f continues sur I dont l'image $f(I)$ ne contient qu'un nombre fini de points.*

Exercice 21.

1. *Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Exercice 22. *Soient f et g des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que $f(0) = g(1) = 0$, et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :*

$$\forall \lambda > 0, \exists x \in [0,1], f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 23. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses.*

1. *L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.*
2. *L'image par f d'un segment est un segment.*
3. *L'image par f d'une partie bornée est bornée.*
4. *L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.*

A faire chez soi

Reprendre ces questions en supposant cette fois que f est strictement monotone en plus d'être continue.

Exercice 24. *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez que f est bornée.*

Exercice 25. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ t. q. : $\forall x \in I,\ (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$.*
Montrer que l'on a : ou bien $f = g$, ou bien $f = -g$.

A faire chez soi

Exercice 26. *Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.*
Montrer que f est continue, bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 27. *Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ selon les valeurs du paramètre réel m.*

Exercice 28.

1. *Montrer que, si f est strictement croissante, on a l'équivalence :*

$$f \circ f(x) = x \Longleftrightarrow f(x) = x$$

2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 + x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.*
   (a) *Montrer que f est bijective.*
   (b) *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$.*