CY Tech

TD Analyse

Limites et Continuité.

Exercice 1

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs et symboles logiques les propositions suivantes :

(1) f n'est pas constante.
Solution :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y).$$

(2) 2 n'est pas l'image d'un réel par f.
Solution :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(\{2\}) = \emptyset.$$

(3) f prend toujours la même valeur pour des réels opposés.
Solution :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x).$$

(4) Aucun réel négatif n'est égal à son image.
Solution :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) \neq x.$$

Exercice 2

(1) Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x) + 2}{x^2 + 1}.$$

Est-elle bornée sur D_f (on ne cherchera pas à étudier les variations de f) ? Déterminer la position relative du graphe de f par rapport à celui de la fonction

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

(2) Soit la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 - 4x^2}{2}\right).$$

Pour quelles valeurs de x les points du graphe de f d'abscisse x sont-il au dessus de l'axe des abscisses ?

Exercice 2

(1) $f(x) = \frac{\cos(x)+2}{x^2+1}$: Nous avons :

- Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. En effet :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0 \quad & \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x^2+1} \text{ est bien définie} \\ & \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\cos(x)+2}{x^2+1} \text{ est bien définie.} \end{aligned}$$

- f est une fonction bornée. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} 1 \leq \cos(x) + 2 \leq 3 \quad & \underbrace{\Longrightarrow}_{x^2+1>0} \quad \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\cos(x)+2}{x^2+1} \leq \frac{3}{x^2+1} \\ & \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\cos(x)+2}{x^2+1} \leq \frac{3}{x^2+1} \leq 3 \\ & \Longrightarrow \quad 0 < f(x) \leq 3. \end{aligned}$$

Exercice 2

Finalement, soit $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Alors d'après la première implication du point précédent, nous avons

$$g(x) \leq f(x),$$

avec

$$f(x) = g(x)$$

si et seulement si $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, les deux courbes se croisent seulement pour $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, dans le cas contraire la courbe de f est au dessus de celle de g.

Exercice 2

(2) $f(x) = \ln\left(\frac{1-4x^2}{2}\right)$: Nous avons :

- Nous avons :

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1-4x^2}{2}\right) \text{ est bien définie} \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{1-4x^2}{2} > 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad 1-4x^2 > 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4} > x^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le domaine de définition de f est

$$D_f = \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[.$$

Exercice 2

- Pour tout $x \in D_f = \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$, nous avons

$$\begin{aligned}
0 \leq x^2 < \frac{1}{4} \quad &\Longrightarrow \quad 0 \geq -x^2 > -\frac{1}{4} \\
&\Longrightarrow \quad 0 \geq -4x^2 > -1 \\
&\Longrightarrow \quad 1 \geq 1 - 4x^2 > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1-4x^2}{2} > 0 \\
&\Longrightarrow \quad 0 > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geq \ln\left(\frac{1-4x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, le graphe de f n'est jamais au dessus l'axe des abscisses.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$. Pour tout $\epsilon > 0$ déterminer δ tel que,

$$(x \neq 1/3 \text{ et } |x| \leq \delta) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) + 3| \leq \epsilon.$$

Que peut-on en conclure ?

Solution : Soit $\epsilon > 0$. Nous allons trouver δ satisfaisant la proposition. Nous avons

$$|f(x) + 3| = \left|\frac{2x+3}{3x-1} + 3\right| = \left|\frac{11x}{3x-1}\right|$$

Ainsi

$$|f(x) + 3| \leq \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{11|x|}{|3x-1|} \leq \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leq \frac{\epsilon \cdot |3x-1|}{11}.$$

Comme nous voulons éviter les problèmes en $x = \frac{1}{3}$ pour lequel la fonction f n'est pas définie, nous allons nous placer « loin » de $\frac{1}{3}$. Considérons seulement les $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \frac{1}{6}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |x| < \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{6} < x < \frac{1}{6} \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{3}{2} < 3x - 1 < -\frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} < |3x-1|. \end{aligned}$$

Exercice 3

Par conséquent, si on prend

$$\delta = \min\left(\frac{1}{6}, \frac{\epsilon}{22}\right),$$

alors pour tout $|x| < \delta$ nous avons

$$|x| < \delta \leq \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} < \frac{\epsilon \cdot |3x - 1|}{11} \quad \Longrightarrow \quad |f(x) + 3| < \epsilon.$$

On conclut donc que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - (-3)| < \epsilon.$$

Autrement dit la limite de f en 0 est -3. Comme $f(0) = -3$ alors cela montre aussi que f est continue en 0.

Exercice 4

Montrer, en revenant à la définition, que :

1. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 \cos(\frac{1}{x})\right) = 0.$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+1}{|x-2|} = +\infty.$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0.$

Exercice 4

(1) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$. **Solution :** Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|x-3| \leq \delta$ nous avons

$$|\sqrt{x+1} - 2| \leq \epsilon.$$

On commence par noter que

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x+1} - 2\right| \leq \epsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{(\sqrt{x+1} - 2)\cdot(\sqrt{x+1} + 2)}{\sqrt{x+1} + 2}\right| < \epsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{x-3}{\sqrt{x+1} + 2}\right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + 2 \geq 2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \leq \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{|x-3|}{\sqrt{x+1} + 2} \leq \frac{|x-3|}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Ainsi pour avoir

$$|\sqrt{x+1}-2| \leq \epsilon,$$

il suffit d'avoir

$$\frac{|x-3|}{2} \leq \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x-3| \leq 2\epsilon.$$

On peut donc prendre

$$\delta = 2\epsilon,$$

pour conclure

$$\forall x \in [-1,+\infty[,\ |x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{x+1}-2| \leq \epsilon.$$

Exercice 4

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 \cos(\frac{1}{x})\right) = 0.$

Solution : Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, avec $|x| \leq \delta$, nous avons

$$\left| x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \epsilon.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$0 \leq \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left| x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2.$$

Ainsi pour avoir

$$\left| x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \epsilon,$$

il suffit d'avoir

$$x^2 \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq \sqrt{\epsilon}$$

Exercice 4

On peut donc prendre

$$\delta = \sqrt{\epsilon},$$

pour conclure

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |x| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \leq \delta^2 = \epsilon.$$

Exercice 4

(3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+1}{|x-2|} = +\infty$.

Solution : Soit $A > 0$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \neq 2$, avec $|x-2| \leq \delta$, nous avons

$$A \leq \frac{x+1}{|x-2|}.$$

Maintenant, puisque on s'interesse à la limite quand x tend vers 2, nous allons nous concentrer sur des réels proches de 2. Nous pouvons donc supposer

$$\begin{aligned} |x-2| \leq 1 \implies 1 \leq x \leq 3 \quad &\implies \quad 2 \leq x+1 \\ &\implies \quad \frac{2}{|x-2|} \leq \frac{x+1}{|x-2|}. \end{aligned}$$

Or

$$A \leq \frac{2}{|x-2|} \quad \iff \quad |x-2| \leq \frac{2}{A}.$$

Exercice 4

Ainsi pour avoir

$$A \leq \frac{x+1}{|x-2|}.$$

Il suffit d'avoir

$$|x-2| \leq \frac{2}{A}.$$

On peut donc prendre

$$\delta = \min\left(1, \frac{2}{A}\right),$$

pour conclure

$$\begin{aligned}
\forall x \neq 2,\ |x-2| \leq \delta \quad &\Longrightarrow \quad |x-2| \leq \frac{2}{A} \\
&\Longrightarrow \quad A \leq \frac{2}{|x-2|} \\
&\Longrightarrow \quad A \leq \frac{2}{|x-2|} \leq \frac{x+1}{|x-2|}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0.$

Solution : Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $A \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $x > A$, nous avons :

$$\left| \frac{1}{e^x + 1} \right| \leq \epsilon.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{e^x + 1} \right| \leq \epsilon \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} \leq |e^x + 1| = e^x + 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} - 1 \leq e^x. \end{aligned}$$

Maintenant, si $\epsilon \geq 1$, alors la dernière inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, en effet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} - 1 \leq 0 \quad & \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\epsilon} - 1 \leq 0 \leq e^x \\ & \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \left| \frac{1}{e^x + 1} \right| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

On peut donc prendre pour A n'importe quelle valeur, par exemple $A = 1$.

Exercice 4

Si $0 < \epsilon < 1$, alors

$$0 < \frac{1}{\epsilon} - 1 \leq e^x \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) \leq x.$$

Ainsi pour avoir

$$\left|\frac{1}{e^x + 1}\right| \leq \epsilon,$$

il suffit d'avoir

$$\ln\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) \leq x.$$

On peut donc choisir

$$A = \ln\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right),$$

pour conclure

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > A \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{e^x + 1}\right| \leq \epsilon.$$

Exercice 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = u > 0.$$

Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \alpha$, alors $|f(x)| \geq \frac{u}{2}$.

Solution : D'après la définition de la limite, pour tout$\epsilon > 0$, nous avons

$$\exists \alpha > 0, \ \forall x \in I, \ 0 < |x - x_0| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - u| \leq \epsilon.$$

Ceci entraine que

$$-\epsilon \leq f(x) - u \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad u - \epsilon \leq f(x) \leq u + \epsilon$$

Ainsi, si on pose par exemple

$$\epsilon \ = \ \frac{u}{2},$$

alors on peut conclure

$$\frac{u}{2} \ = \ u - \frac{u}{2} \ \leq \ f(x) \ \leq \ u + \frac{u}{2} \ = \ \frac{3u}{2} \quad \Longrightarrow \quad 0 \ < \ \frac{u}{2} \ \leq \ f(x).$$

Exercice 5

Par conséquent

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha, \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| = f(x) \geq \frac{u}{2}.$$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, qui admet une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est constante.

Solution : Soit $T > 0$ une période de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} x + nT = +\infty.$$

Maintenant, puisque f admet une limite $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, on déduit de la **caractérisation séquentielle de la limite** que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n \to +\infty} f(x + nT) = L.$$

Or, par T-périodicité, nous pouvons écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ f(x + nT) = f(x).$$

Ainsi, $(f(x + nT))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante de valeur $f(x)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n \to +\infty} f(x + nT) \ = \ f(x)$$

Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est une fonction constante.}$$

Exercice 7

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $\ell,\ \ell' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \ell'.$$

Montrer que

$$\lim_{x \to 0} \max(f(x), g(x)) = \max(\ell, \ell').$$

Solution : Notons d'abord que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\max(a, b) = \frac{(a + b) + |a - b|}{2}.$$

Ainsi

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{(f(x) + g(x)) + |f(x) - g(x)|}{2}.$$

et

$$\lim_{x \to 0} \max(f(x), g(x)) \quad = \quad \lim_{x \to 0} \frac{(f(x) + g(x)) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

Exercice 7

Or, nous avons le résultat suivant :

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ *et* $a \in \bar{I} = I \cup \{\textit{extrémités de } I\}$. *Alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} |f(x)| = |L|.$$

Puisque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \ell'.$$

Nous avons

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{2} = \frac{\ell - \ell'}{2}.$$

Le résultat précédent nous permet donc de conclure

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x) - g(x)|}{2} = \frac{|\ell - \ell'|}{2}.$$

Exercice 7

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \max(f(x), g(x)) &= \lim_{x\to 0} \frac{(f(x)+g(x)) + |f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(f(x)+g(x))}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{(\ell+\ell')}{2} + \frac{|\ell-\ell'|}{2} \\
&= \frac{(\ell+\ell') + |\ell-\ell'|}{2} \\
&= \max(\ell, \ell').
\end{aligned}$$

Exercice 8

Est-il vrai que si f et g sont deux fonctions positives sur $\mathbb{R}_+$, et si f et g ont même limite en $+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Solution : La proposition est fausse. En effet, soit

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} g(x),$$

mais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Exercice 9

(1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Montrer la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}) \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x, x' \in \mathbb{R}, \left(x > A \text{ et } x' > A \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \epsilon \right).$$

Solution : Soit $\epsilon > 0$. Alors d'après la définition de la limite, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > A \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x,\ x' \in \mathbb{R}$ avec $x > A$ et $x' > A$, nous avons

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |(f(x) - l) + (l - f(x'))| \\ &\leq |f(x) - l| + |l - f(x')| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(2) Écrire la négation de la propriété $(\mathcal{P})$.

Solution :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x, x' \in \mathbb{R},\ \left(x > A \text{ et } x' > A \quad \text{et} \quad |f(x) - f(x')| \geq \epsilon \right).$$

Exercice 9

(3) Montrer que la négation de $(\mathcal{P})$ est vraie pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ (on pourra penser à prendre $x = 2n\pi$, $x' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$). Conclure.

Solution : On commence par noter que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|\sin(2n\pi) - \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |0-1| = 1.$$

Ainsi, si on prend $\epsilon = 1$ et pour tout $A > 0$ on choisit :

$$x = 2(E(A)+1)\pi \quad \text{et} \quad x' = 2(E(A)+1)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

on aura

$$x > A \text{ et } x' > A \qquad \text{et} \qquad |\sin(x) - \sin(x')| \geq 1 = \epsilon.$$

La negation de $(\mathcal{P})$ est donc vrai pour $\sin(x)$. Maintenant, dans la question 1 nous avons vu que :

$$f \text{ admet une limite finie en } +\infty \quad \Longrightarrow \quad f \text{ satisfait } (\mathcal{P})$$

Par contrapose,

$$f \text{ satisfait non } \mathcal{P} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ n'admet pas de limite finie en } +\infty.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

Exercice 9

(4) Quelles sont les fonctions périodiques admettant une limite finie en $+\infty$?

Solution : On commece par noter que toute fonction périodique constante admet une limite finie en $+\infty$. Soit f une fonction périodique non constante, de période T. Puisque f est non constante, il existe $x_0,\ x_0' \in \mathbb{R}_+$ avec $x_0 \neq x_0'$ tel que

$$f(x_0) \neq f(x_0').$$

On peut donc raissoner comme dans le point précédent pour conclure que f satisfait la négation de $(\mathcal{P})$ et donc que f n'admet pas de limite finie en $+\infty$. En effet, notons que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f(x_0 + nT) - f(x_0' + nT)\right| = |f(x_0) - f(x_0')| > 0.$$

Ainsi, si on prend $\epsilon = |f(x_0) - f(x_0')|$ et pour tout $A > 0$ on choisit :

$$x = x_0 + \left(E\left(\frac{A}{T}\right) + 1\right) T \quad \text{et} \quad x' = x_0' + \left(E\left(\frac{A}{T}\right) + 1\right) T.$$

on aura

$$x > A \text{ et } x' > A \quad \text{et} \quad |f(x) - f(x')| \geq |f(x_0) - f(x_0')| = \epsilon.$$

La negation de $(\mathcal{P})$ est donc vrai pour f, d'oùn on déduit que f n'admet pas de limite finie en $+\infty$. Les seules fonctions périodiques admettant une limite finie en $+\infty$ sont donc les fonctions constantes.

Exercice 10

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

Exercice 10

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$: Puisque $L \neq 0$, nous avons que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \quad \implies \quad \exists\, A > 0,\ \forall x > A,\ \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{L}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ x > B \quad &\implies \quad \left| \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| - \frac{1}{|L|} \right| \leq \epsilon \\
&\implies \quad 0 \leq \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|L|} + \epsilon \\
&\implies \quad 0 \leq |g(x)| \leq |f(x)| \left(\frac{1}{|L|} + \epsilon \right) \\
&\implies \quad 0 \leq \lim_{x\to+\infty} |g(x)| \leq \lim_{x\to+\infty} |f(x)| \left(\frac{1}{|L|} + \epsilon \right) = 0 \\
&\implies \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.
\end{aligned}$$

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ x > A \quad & \implies \quad \left| \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| - |L| \right| \leq \epsilon \\
& \implies \quad 0 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq |L| + \epsilon \\
& \implies \quad 0 \leq |f(x)| \leq |g(x)| \left(|L| + \epsilon \right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} |f(x)| \leq \lim_{x\to+\infty} |g(x)| \left(|L| + \epsilon \right) = 0$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 10

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$: Puisque $L > 0$, nous avons que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0 \quad \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{L} > 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\exists B,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > B \quad &\implies \left|\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| \leq \frac{1}{2L} \\
&\implies \frac{1}{2L} \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{3}{2L} \\
&\implies \frac{f(x)}{2L} \leq g(x) \\
&\implies +\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2L} \leq \lim_{x\to+\infty} g(x) \\
&\implies \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.
\end{aligned}$$

Exercice 10

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: Nous avons

$$\begin{aligned} \exists A,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > A \quad & \implies \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \frac{L}{2} \\ & \implies \quad \frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3L}{2} \\ & \implies \quad \frac{g(x)\cdot L}{2} \leq f(x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)\cdot L}{2} \leq \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. **Solution :** Nous avons

$$\begin{aligned}
0\leq\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad 0\leq|x|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x| \\
&\Longrightarrow \quad 0\leq\lim_{x\to 0}\left|x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\lim_{x\to 0}|x|=0 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\left|x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|=0 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0.
\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$. **Solution :** Nous avons

$$\begin{aligned}
-1\leq\cos\left(e^x\right)\leq 1 \quad &\underbrace{\Longrightarrow}_{x>0} \quad -\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}\leq\frac{x}{x^2+1} \\
&\Longrightarrow \quad 0=\lim_{x\to\infty}-\frac{x}{x^2+1}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}=0.
\end{aligned}$$

Exercice 11

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)}$. **Solution :** Nous avons

$$\begin{aligned}
-1 \leq -\sin(x) \leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad x-1 \leq x-\sin(x) \leq x+1\\
&\Longrightarrow \quad e^{x-1} \leq e^{x-\sin(x)} \leq e^{x+1}\\
&\Longrightarrow \quad +\infty = \lim_{x\to\infty} e^{x-1} \leq \lim_{x\to\infty} e^{x-\sin(x)} \leq \lim_{x\to\infty} e^{x+1} = +\infty\\
&\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty.
\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot E\left(\frac{1}{x}\right)$. **Solution :** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}-1 \leq E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \quad &\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{car } x>0} \quad 1-x \leq x\cdot E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1\\
&\Longrightarrow \quad 1 = \lim_{x\to 0^+} 1-x \leq \lim_{x\to 0^+} x\cdot E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1\\
&\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} x\cdot E\left(\frac{1}{x}\right) = 1
\end{aligned}$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ nous avons

$$\frac{1}{x}-1 \leq E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{car } x<0} \quad 1-x \geq x\cdot E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 \quad \Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} x\cdot E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Exercice 11

Ainsi

$$\lim_{x \to 0} x \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot E\left(\frac{1}{x}\right)$. **Solution :** Nous avons

$$\begin{aligned} \forall x > 1,\ \frac{1}{x} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \forall x > 1,\ E\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad & \Longrightarrow \quad \forall x > 1,\ x \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ & \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} x \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 12

(1) Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x^3-1}-\frac{2}{x^2-1} &= \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\\
&= \frac{3(x+1)-2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}\\
&= \frac{3x+3-2x^2-2x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}\\
&= \frac{-2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}\\
&= \frac{(x-1)(-2x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}\\
&= \frac{-2x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}
\end{aligned}$$

Exercice 12

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{2}{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{-2x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(-2x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(x^2+x+1)}\\
&= \frac{-3}{2\cdot 3}\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Exercice 12

(2) Déterminer la limite suivante : $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - x\right)$.

Solution : Pour tou $x > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x-1} - x &= \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x-1} + x} \\
&= \frac{x^2+2x-1-x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x} \\
&= \frac{2x-1}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x} \\
&= \frac{x \cdot (2-\frac{1}{x})}{x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Exercice 12

(3) Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ avec

$$g(x) = \left(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}} \right).$$

Solution : Pour tou $x > 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}} \right)\left(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}} \right)}{\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}}} \\
&= \frac{x + \sqrt{x+1} - (x + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}}} \\
&= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}}} \\
&= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\left(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}} \right)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \\
&= \frac{x + 1 - x + 1}{\left(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}} \right)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}.
\end{aligned}$$

Exercice 12

Par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Continuité

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que

- *f est continue à gauche en a si $f(a)$ est la limite à gauche de f en a :*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

- *f est continue à droite en a si $f(a)$ est la limite à droite de f en a :*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Remarque : Une fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Continuité

Proposition

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie L en a. Dans ce cas, un tel prolongement $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ est unique, donné par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a. \end{cases}$$

On l'appelle le prolongement par continuité de f en a (qu'on notera souvent f sans distinction par abus de notation).

Continuité

Proposition (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g des fonctions continues sur I et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

1. *Les fonctions $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$ sont continue sur I.*
2. *Si de plus, g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est continue sur I.*

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ continue sur J avec $f(I) \subset J$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Exercice 13

(1) Soit f la fonction définie par $\begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+2x+3}{x^3+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution : On commence par noter que les fonctions

$$\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad e^{3x} - 1$$

sont continues sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi, leur produit $\frac{e^{3x}-1}{x}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}_-^*$. De même, les fonctions

$$\frac{1}{x^3+1} \quad \text{et} \quad x^2 + 2x + 3$$

sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, leur produit $\frac{x^2+2x+3}{x^3+1}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ il ne nous reste qu'à vérifier l'égalité :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x}-1}{x} \stackrel{?}{=} f(0) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 + 3}{0^3 + 1} = 3.$$

Exercice 13

Calculons cette dernière limite. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x} - 1}{x} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x} - e^{3 \cdot 0}}{x - 0} \\
&= \left(e^{3x}\right)' \Big|_{x=0} \\
&= 3e^0 \\
&= 3 = f(0).
\end{aligned}$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

(2) Soit g une fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+3x)}{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Quelle valeur doit-on donner à a pour que g soit prolongeable par continuité en 0 ?

Solution : La fonction g est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{2x}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax) - \sin(a \cdot 0)}{x - 0} \\ &= (\sin(ax))'|_{x=0} \\ &= a \cdot \cos(a \cdot 0) \\ &= a \cos(0) = a, \end{aligned}$$

et en efectuant le changement de variable $1+3x=y$, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+3x)}{2x}=\lim_{y\to 1^+}\frac{\ln(y)}{2\cdot\left(\frac{y-1}{3}\right)} &= \frac{3}{2}\cdot\lim_{y\to 1^+}\frac{\ln(y)-\ln(1)}{y-1}\\ &= \frac{3}{2}(\ln(y))'_{y=1}\\ &= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)_{y=1}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi g est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $a=\frac{3}{2}$.

Exercice 14

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x+1}{3x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue en 1 ?

Solution : La fonction g est continue en 1 si et seulement si :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} = g(1) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{3x-1} = g(1) = 2.$$

Maintent

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{3x-1} &= \frac{\lim\limits_{x \to 1^+} x+1}{\lim\limits_{x \to 1^+} 3x-1} \\ &= \frac{2}{2} = 1 \neq 2. \end{aligned}$$

Exercice 14

et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(x)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}\\ &= \ln'(x)|_{x=1}\\ &= 1\neq 2.\end{aligned}$$

Ainsi g n'est pas continue en 1.

Exercice 16

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

(1) $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0.$

Solution : Les fonctions

$$\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \cos(x)$$

sont continues sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, leur composition $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ définie une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ et on peut dire de même de $x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Il ne nous reste que à étudier la continuité de f_1 en 0. Pour montrer la continuité de f_1 en 0, il nous faut vérifier l'égalité :

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{?}{=} f_1(0) = 0.$$

Exercice 16

Calculons cette dernière limite. Nous avons

$$\begin{aligned}
-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad & \Longrightarrow \quad -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \\
& \Longrightarrow \quad 0 = -\lim_{x\to 0} x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = f_1(0) \\
& \Longrightarrow \quad f_1 \text{ est continue en } 0.
\end{aligned}$$

Exercice 16

(2) $f_2(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0.$

Solution : Les fonctions

$$\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin(x)$$

sont continues sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, leur composition $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$, et on peut dire de même de $\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Il ne nous reste que à étudier la continuité de f_2 en 0. Pour montrer la continuité de f_2 en 0 il nous faut vérifier l'égalité :

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{?}{=} f_2(0) = 0.$$

Exercice 16

Calculons cette dernière limite. Nous avons

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \quad & \Longrightarrow \quad 0 \leq |\sin(x)| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin(x)| \\
& \Longrightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to 0} |\sin(x)| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \lim_{x\to 0} |\sin(x)| = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} |\sin(x)| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = f_2(0) \\
& \Longrightarrow \quad f_2 \text{ est continue en } 0.
\end{aligned}
$$

Exercice 16

(3) $f_3(x) = x \cdot E(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : Les fonctions

$$x \quad \text{et} \quad E(x)$$

sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Ainsi, leur produit $x \cdot E(x)$ défini une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Il ne nous reste que à étudier la continuité de f_3 sur $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to n^-} x \cdot E(x) &= \lim_{x \to n^-} x \cdot (n-1) \\ &= (n-1) \lim_{x \to n^-} x \\ &= (n-1)n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \to n^+} x \cdot E(x) &= \lim_{x \to n^+} x \cdot n \\ &= n \cdot \lim_{x \to n^+} x \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Exercice 16

Par conséquent

$$\lim_{x \to n^-} f_3(x) \neq \lim_{x \to n^+} f_3(x).$$

Ainsi, la fonction f_3 n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z}$.

Exercice 16

(4) $f_4(x) = [x - E(x)]^2$ et $f_5(x) = E(x) + f_4(x)$.

Solution : Le même raisonnement utilisé dans la question précédente, nous permet de conclure que f_4 et f_5 sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Étudions la continuité de ces deux fonctions sur $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to n^-} [x - E(x)]^2 &= \lim_{x \to n^-} [x - (n-1)]^2 \\
&= [n - (n-1)]^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to n^+} [x - E(x)]^2 &= \lim_{x \to n^+} [x - n]^2 \\
&= [n - n]^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exercice 16

Par conséquent

$$\lim_{x \to n^-} f_4(x) \neq \lim_{x \to n^+} f_4(x).$$

Ainsi, la fonction f_4 n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z}$.

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{x \to n^-} E(x) + [x - E(x)]^2 &= (n-1) + [n - (n-1)]^2 \\ &= n \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \to n^+} E(x) + [x - E(x)]^2 = n + [n - n]^2 = n.$$

Par conséquent

$$\lim_{x \to n^+} f_5(x) = f_5(n) = \lim_{x \to n^+} f_5(x).$$

Ainsi, la fonction f_5 est continue dans tout point de $\mathbb{Z}$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrez que la fonction f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Pour résoudre cet exercice nous aurons besoin du résultat suivant :

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Solution : Puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver pour chaque $a \in \mathbb{R}$ une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans $\mathbb{Q}$ et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telles que

$$u_n \to a \quad \text{et} \quad v_n \to a.$$

Exercice 17

Maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$. Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n \to +\infty} f(v_n).$$

Les suites $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne convergent donc pas vers la même limite alors que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers a. Du Théorème précédent on en déduit que f n'est pas continue en a. Puisque a est un point quelconque de $\mathbb{R}$, on conclut que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 18

(1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues en 0, qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = f(3x).$$

Solution : Fixons $x \in \mathbb{R}$. Nous allons calculer la valeur de f(x). Pour cela, on commence par noter que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) = f\left(\frac{x}{3^2}\right) = \cdots = f\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

Ainsi, en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n = \frac{x}{3^n}.$$

on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f(x_n) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x).$$

Maintenant

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0,$$

et par continuité de f en 0 on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(0) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(0).$$

Comme ce raisonnement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous venons de montrer que f est une fonction constante.

Exercice 18

(2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues en 1, qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(x^2).$$

Solution : Soit f une fonction satisfaisant la propriété. On commence par noter que

$$f(-x) = -f((-x)^2) = -f(x^2) = f(x).$$

Ainsi f est une fonction paire. Il suffit donc d'étudier f sur l'ensemble des réels positifs. Tout d'abord

$$f(0) = -f(0^2) = -f(0) \quad \Longrightarrow \quad 2f(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 0.$$

Fixons en suite $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Nous allons calculer la valeur de $f(x)$. On commence par noter que

$$f(x) = -f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \cdots = (-1)^n f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$$

Ainsi, en posant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x^{\frac{1}{2^n}}.$$

on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = (-1)^n f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} (-1)^n f(x).$$

Exercice 18

Notons que la limite
$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n f(x)$$
existe si et seulement si $f(x)=0$.

Maintenant
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1,$$
et par continuité de f en 1 on en déduit que
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(1) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(-1)^n f(x) = f(1)\\ &\Longrightarrow \quad f(x) = f(1) = 0.\end{aligned}$$

Comme ce raisonnement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et pour $x=0$ nous avons $f(0)=0$, nous venons de montrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. Finalement, par parité de f on conclut f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

TVI

Avant de continuer avec le TD, rappelons le **Théorème des valeurs intermédiaires** :

Théorème (T.V.I - version 1)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $a,\ b \in I$ *tels que*

$$f(a)f(b) \leq 0.$$

Alors il existe c *compris entre* a *et* b *tel que*

$$f(c) = 0.$$

Théorème (T.V.I - version 2)

Si I *est un intervalle et si* $f : I \to \mathbb{R}$ *est continue sur* I*, alors* $f(I)$ *est un intervalle. Autrement dit, pour tout* $a,\ b \in I$ *et pour tout* y *entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*

$$f(c) = y.$$

Exercice 19

(1) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer, par considération de $\phi(x) = f(x) - x$, qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.

(2) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

(3) Un mobile parcours, à vitesse continue, une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

Exercice 19

(1) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer, par considération de $\phi(x) = f(x) - x$, qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Solution : Soit ϕ la fonction définie sur $[a, b]$ par :

$$\phi(x) = f(x) - x.$$

Alors

- La fonction ϕ est continue.
- Nous avons de plus :

$$\begin{array}{ccccc} f(a) \in [a, b] & \Longrightarrow & a \leq f(a) & \Longrightarrow & \phi(a) = f(a) - a \geq 0. \\ f(b) \in [a, b] & \Longrightarrow & f(b) \leq b & \Longrightarrow & \phi(b) = f(b) - b \leq 0. \end{array}$$

  Ainsi

$$\phi(b) \leq 0 \leq \phi(a).$$

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [a, b]$, tel que :

$$\phi(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(c) - c = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(c) = c.$$

Exercice 19

(2) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c)=f(c+\frac{1}{2})$.

Solution : Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par :

$$g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Alors

- La fonction g est continue.
- Nous avons de plus :

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0) \\ &= -\left(f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -g(0). \end{aligned}$$

Ainsi $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés.

Exercice 19

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, tel que :

$$g(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 19

(3) Un mobile parcours, à vitesse continue, une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

Solution : Notons t le temps (en heure) et $\mathscr{D}(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t. Par hypothèse

$$\mathscr{D}(1) = d.$$

Maintenant, supposons que la fonction

$$t \longmapsto \mathscr{D}(t),$$

est continue, et considérons la fonction

$$f(t) = \mathscr{D}(t) - d \cdot t.$$

Alors

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 0.$$

Exercice 19

Appliquons la question précédente à la fonction $f(t) = \mathscr{D}(t) - d \cdot t$.
Ainsi, il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right).$$

Donc

$$\mathscr{D}(c) - d \cdot c = \mathscr{D}\left(c + \frac{1}{2}\right) - d \cdot \left(c + \frac{1}{2}\right)$$

ce qui implique :

$$\mathscr{D}\left(c + \frac{1}{2}\right) - \mathscr{D}(c) = d \cdot \left(c + \frac{1}{2}\right) - d \cdot c = \frac{d}{2}.$$

Par conséquent, entre c et $c + \frac{1}{2}$(soit $1/2$ heure), la personne parcourt exactement $\frac{d}{2}$ km.

Exercice 20

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Trouvez les fonctions f continues sur I dont l'image $f(I)$ ne contient qu'un nombre fini de points.

Solution : Soit f une fonction continue sur I dont l'image ne contient qu'un nombre fini de points. On va démontrer qu'elle est constante en faisant un raisonnement par l'absurde et en utilisant le Théorème des valeurs intermédiaires. Supposons donc que f est non constante, c'est-à-dire, il existe $a < b$ dans I, tel que

$$f(a) \neq f(b).$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, tout élément dans l'intervalle

$$[f(a), f(b)] \text{ si } \ f(a) < f(b) \quad (\text{ou } [f(b), f(a)] \text{ si } \ f(b) < f(a))$$

possède au moins un antécédent dans $[a, b]$, c'est-à-dire pour tout $d \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$) il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = d.$$

Comme cette intervalle contient un nombre infini de points, on obtient une contradiction.

Exercice 20

Donc, pour tous $a, b \in I$, on a

$$f(a) = f(b).$$

Autrement dit, f est constante.

Exercice 21

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses.

(1) L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.

Solution : Faux. En effet, soit

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad I =]-3\pi, 3\pi[.$$

Alors

$$f(I) = [-1, 1], \quad \text{qui est un intervalle fermé.}$$

(2) L'image par f d'un segment est un segment.

Solution : Vrai. Théorème vu en CM.

Exercice 21

(3) L'image par f d'une partie bornée est bornée.

Solution : Vrai. En effet, soit B une partie bornée de $\mathbb{R}$. Alors il existe $m, M \in \mathbb{R}$ avec $m < M$, tel que

$$B \subset [m, M] \quad \Longrightarrow \quad f(B) \subset f\big([m, M]\big).$$

Or, d'après le point précédent l'image par f de $[m, M]$ est un segment. Ainsi, il existe $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$ avec $m_1 < M_1$, tel que

$$f(B) \subset f\big([m, M]\big) = [m_1, M_1] \quad \Longrightarrow \quad f(B) \text{ est une partie bornée de } \mathbb{R}.$$

(4) L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.

Solution : Faux. En effet, soit

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad I =]0, +\infty[.$$

Alors

$$f^{-1}(I) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[, \quad \text{qui n'est pas un intervalle.}$$

Exercice 21

Notons que la proposition :

l'image par f d'une partie bornée est bornée

est fausse si l'on enleve la hypothèse f continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad I =]0, 1].$$

Alors

$$f(I) = [1, +\infty[.$$

La fonction $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21

Reprendre ces questions en supposant cette fois que f est strictement monotone en plus d'être continue.

(1) L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.

Solution : Vrai. En effet, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, nous avons :
Si f est croissante :

$$f(]a,b[) =]f(a), f(b)[\quad ; \quad f(]a,+\infty[) =]f(a), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$
$$; \quad f(]-\infty, a[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(a)[.$$

Si f est décroissante :

$$f(]a,b[) =]f(b), f(a)[\quad ; \quad f(]a,+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(a)[$$
$$; \quad f(]-\infty, a[) =]f(a), \lim_{x\to-\infty} f(x)[.$$

(2) L'image par f d'un segment est un segment.

Solution : Vrai.

Exercice 22

(3) L'image par f d'une partie bornée est bornée.

Solution : Vrai.

(4) L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.

Solution : Vrai. En effet, toute fonction f continue et strictement monotone, possède une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement monotone. Maintenant, l'image réciproque par f d'un intervale I, est égal à la image directe du même intervalle par f^{-1}. Or, f^{-1} est continue, donc

$$f^{-1}(I) \quad \text{est un intervalle.}$$

Exercice 22

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez que f est bornée.

Solution : Notons L la limite de f en $+\infty$:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}_+,\ x > A \quad \Longrightarrow \quad L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon.$$

Fixons $\epsilon = 1$, nous obtenons un A correspondant tel que :

$$\forall x > A, \quad L - 1 \leq f(x) \leq L + 1.$$

Nous venons de montrer que f est bornée dans un voisinage de $+\infty$. De même, Notons L' la limite de f en $-\infty$:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A' \in \mathbb{R}_-,\ x < A' \quad \Longrightarrow \quad L' - \epsilon \leq f(x) \leq L' + \epsilon.$$

Fixons $\epsilon = 1$, nous obtenons un A' correspondant tel que :

$$\forall x < A', \quad L' - 1 \leq f(x) \leq L' + 1.$$

Nous venons de montrer que f est bornée dans un voisinage de$-\infty$.

Exercice 22

Finalement, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[A', A]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe $m,\ M$ tels que :

$$\forall x \in [A', A], \quad m \leq f(x) \leq M.$$

En prenant $M_0 = \max(M, L+1, L'+1)$, et $m_0 = \min(m, L-1, L'-1)$ nous avons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad m_0 \leq f(x) \leq M_0.$$

Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23

(1) Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Solution :

(1) Posons :

$$f(x) = x^{17} - x^{11} - 1.$$

Alors :

- La fonction $f(x) = x^{17} - x^{11} - 1$ est continue.
- De plus :

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0^{17} - 0^{11} - 1 = -1 \\ f(2) & = & 2^{17} - 2^{11} - 1 = 2^{11}(2^6 - 1) - 1 > 0. \end{array}$$

  Ainsi

$$f(0) < 0 < f(2).$$

Exercice 23

Par le Théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur de $[f(0), f(2)]$ est prise par f. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \alpha^{17} - \alpha^{11} - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \alpha^{17} = \alpha^{11} + 1. \end{aligned}$$

Exercice 23

(2) Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Solution : Soit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

un polynôme de degré impair (i.e. $\deg P = n \in 2\mathbb{Z} + 1$). Alors :

- La fonction $P(x)$ est continue.
- De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 &= a_n \cdot \lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \\ \lim_{x \to -\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 &= a_n \cdot \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par le Théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur de $]-\infty, +\infty[$ est prise par $P(x)$. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P(\alpha) = 0.$$

Exercice 24

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ t. q. :

$$\forall x \in I, \quad (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0.$$

Montrer que l'on a : ou bien $f = g$, ou bien $f = -g$.

Solution :

<u>Méthode 1</u> : Considérons la fonction

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Comme pour tout $x \in I$, nous avons

$$(g(x))^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) \neq 0,$$

on conclut que h est une fonction continue sur I en tant que quotient de fonctions continues. De plus

$$\forall x \in I, \quad h(x)^2 = \frac{(f(x))^2}{(g(x))^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in I, \quad h(x) = 1 \text{ ou } h(x) = -1.$$

Exercice 24

Montrons que h est constante égale à 1 ou -1 ce qui nous permettra de conclure

$$f = g, \quad \text{ou bien} \quad f = -g.$$

Par l'absurde, si h n'est pas constante égale à 1 ni à -1 alors il existe $a, b \in I$ tel que

$$h(a) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad h(b) = -1 < 0.$$

Ainsi, par le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $c \in I$ tel que

$$h(c) = 0.$$

Absurde, car pour tout $x \in I$, $h(x) = 1$ ou $h(x) = -1$. Par conséquent, h est constante égale à 1 ou -1 et donc

$$\forall x \in I,\ \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \text{ou} \quad \forall x \in I,\ \frac{f(x)}{g(x)} = -1$$

ce qui implique $f = g$, ou bien $f = -g$.

Exercice 24

<u>**Méthode 2**</u> : On commence par noter que, puisque f et g sont deux fonctions continues satisfaisant, pour tout $x \in I$, la propriété :

$$(f(x))^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad (g(x))^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad g(x) \neq 0,$$

le T.V.I nous permet de conclure :

$$\forall x \in I, \quad f(x) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in I, \quad f(x) < 0.$$

De même

$$\forall x \in I, \quad g(x) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in I, \quad g(x) < 0.$$

Ainsi, les fonctions f et g sont de signe constante.

Exercice 24

Maintenant, par hypothèse, nous avons

$$\forall x \in I, \quad (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0,$$

ce qui nous permet de conclure

$$\forall x \in I, \; f(x) = g(x) \quad \text{ou} \quad f(x) = -g(x).$$

Et comme f et g sont soit toujours positives, soit toujours negatives, on déduit

$$\begin{array}{rcll} f & = & g & \text{si } f \text{ et } g \text{ sont de même signe,} \quad \text{et} \\ -f & = & g & \text{si } f \text{ et } g \text{ sont de signes opposés.} \end{array}$$

Exercice 25

Soient f et g des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que $f(0) = g(1) = 0$, et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda > 0,\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Solution : Pour tout $\lambda > 0$, soit ϕ_λ la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\phi_\lambda(x) = f(x) - \lambda g(x).$$

Alors :

- Pour tout λ, la fonction ϕ_λ est continue.
- Nous avons de plus :

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(0) &= f(0) - \lambda g(0) = -\lambda < 0. \\ \phi_\lambda(1) &= f(1) - \lambda g(1) = 1. \end{aligned}$$

  Ainsi

$$\phi_\lambda(0) < 0 < \phi_\lambda(1)$$

Exercice 25

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $a \in [0, 1]$, tel que :

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(a) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(a) - \lambda g(a) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad f(a) = \lambda g(a). \end{aligned}$$

Exercice 26

Déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\ln x = mx$$

selon les valeurs du paramètre réel m.

Solution : Supposons $m > 0$. Alors

$$\forall x \in \,]0,1],\ mx > 0 \quad \text{et} \quad \ln(x) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in]0,1],\ \ln(x) \neq mx.$$

Étudions la solution de $\ln(x) = mx$ sur $]1,+\infty[$. Nous avons

$$\forall x \in \,]1,+\infty[,\ \ln(x) = mx \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{m}.$$

La fonction $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ est continue et :

- strictement décroissante sur $]1, e]$.
- strictement croissante sur $[e, +\infty]$.

De plus

$$f\Big(]1,e]\Big) = f\Big([e,+\infty[\Big) = [e,+\infty[.$$

Exercice 26

On a trois cas possibles pour $m > 0$ à étudier :

- Cas $m > \frac{1}{e}$. Si $m > \frac{1}{e}$ alors $\frac{1}{m} < e$. Maintenant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \notin [e, +\infty[= f(]1, +\infty[) &\implies \forall x \in]1, +\infty[, \ \frac{x}{\ln(x)} \neq \frac{1}{m} \\ &\implies \forall x \in]1, +\infty[, \ \ln(x) \neq mx. \end{aligned}$$

- Cas $m = \frac{1}{e}$. Nous avons :

$$\frac{x}{\ln(x)} = e \quad \underbrace{\iff}_{e \text{ est le minimum de } f \text{ sur }]1,+\infty[} \quad x = e.$$

  Ainsi, l'équation $\ln(x) = mx$ a exactement une solution égale à e.

- Cas $m < \frac{1}{e}$. Si $m < \frac{1}{e}$ alors $\frac{1}{m} > e$. Maintenant, la fonction f est strictement décroissante et continue sur $]1, e]$. De plus $\frac{1}{m} \in f(]1, e])$. Or, d'après le Théorème de la bijection, f realise un bijection de $]1, e]$ sur $f(]1, e]) = [e, +\infty[$. L'équation

$$\frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{m}$$

  possède donc une unique solution α sur $]1, e]$.

Exercice 26

De même, la fonction f est strictement croissante et continue sur $[e, +\infty[$. De plus $\frac{1}{m} \in f([e, +\infty[)$. Or, d'après le Théorème de la bijection, f realise un bijection de $[e, \infty[$ sur $f([e, +\infty[) = [e, \infty[$. L'équation

$$\frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{m}$$

possède donc une unique solution β sur $[e, +\infty[$. Finalement, l'équation

$$\ln(x) = mx$$

possède exactement deux solutions sur $]1, +\infty[$.

Exercice 26

Supposons $m \leq 0$. Posons $f(x) = \ln(x) - mx$. Alors

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - m > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante et continue sur $]0, +\infty[$. De plus

$$0 \in \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$

Donc, d'après le Théorème de la bijection, l'équation

$$\ln(x) - mx = 0 \quad \text{et donc l'équation} \quad \ln(x) = m \cdot x.$$

possède une unique solution sur $]0, +\infty[$.

Exercice 27

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Montrer que f est continue, bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.
Solution : Les fonctions

$$e^x \quad \text{et} \quad e^x + 1$$

sont continues sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction $x \mapsto e^x + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Leur quotient $\frac{e^x}{e^x+1}$ définit donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x+1-1}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$$

D'où on conclut

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Longrightarrow \quad e^x + 1 < e^y + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{e^y+1} < \frac{1}{e^x+1} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{e^x+1} < -\frac{1}{e^y+1} \\ &\Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{e^x+1} < 1 - \frac{1}{e^y+1} \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y) \\ &\Longrightarrow \quad f \text{ est strictement croissant} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ realise une bijection sur } f(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Exercice 27

Maintenant

$$\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{e^x+1}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{e^x+1}=1.$$

Ainsi

$$f(\mathbb{R})=]0,1[\quad \Longrightarrow \quad f \text{ est bijective sur }]0,1[.$$

Finalement, pour tout $y\in\,]0,1[$ nous avons

$$\begin{aligned} y=1-\frac{1}{e^x+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{e^x+1}=1-y \quad & \Longrightarrow \quad e^x+1=\frac{1}{1-y} \\ & \Longrightarrow \quad e^x=\frac{1}{1-y}-1=\frac{y}{1-y} \\ & \Longrightarrow \quad e^x=\frac{y}{1-y} \\ & \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)=x. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application réciproque de f est donnée par

$$\begin{aligned} f^{-1} :]0,1[\quad & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ y \quad & \longmapsto \quad \ln\left(\frac{y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

Exercice 28

(1) Montrer que, si f est strictement croissante, on a l'équivalence :

$$f \circ f(x) = x \iff f(x) = x.$$

Solution : On raisonne par double implication :

- $\Longrightarrow$: Au lieu de montrer $(f \circ f)(x) = x \implies f(x) = x$ directement, montrons la contraposée :

$$f(x) \neq x \implies (f \circ f)(x) \neq x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$, sans perte de généralité on peut supposer :

$$f(x) < x \underbrace{\implies}_{f \text{ strictement croissante}} f(f(x)) < f(x) < x \implies (f \circ f)(x) \neq x.$$

- $\Longleftarrow$: Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$, alors

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x.$$

Exercice 28

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 + x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que f est bijective.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f'(x) \; = \; 5x^4 + 1 > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante. D'où on conclut que f realise un bijection sur $f(\mathbb{R})$. Maintenant

$$\lim_{x \to -\infty} x^5 + x - 1 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^5 + x - 1 = +\infty.$$

Par conséquent

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est bijective sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 28

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$.

Solution : Puisque f est strictement croissante, nous pouvons écrire :

$$f(x) = f^{-1}(x) \iff (f \circ f)(x) = x \iff f(x) = x \iff x^5 + x - 1 = x$$

Ainsi

$$f(x) = f^{-1}(x) \iff x^5 - 1 = 0 \iff x^5 = 1 \iff x = 1.$$