

## Intégration

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 4]$  par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. Calculer  $\int_0^4 f(t) dt$ .
2. Soit  $x \in [0, 4]$ , calculer  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .
3. Montrer que  $F$  est une fonction continue sur  $[0, 4]$ . La fonction  $F$  est-elle dérivable sur  $[0, 4]$  ?

### Solution

1. Notons que pour la subdivision de  $[0, 4]$  définie par  $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4\}$ , nous avons  $f$  est constante sur  $]x_i, x_{i+1}[$ .

Ainsi,  $f$  est une **fonction en escalier**. Par conséquent

$$\int_0^4 f(t) dt = 1 \cdot (1 - 0) + (-2) \cdot (2 - 1) + 4 \cdot (4 - 2) = 7.$$

2. En utilisant la **relation de Chasles** nous pouvons conclure :
  - si  $0 \leq x \leq 1$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = 1 \cdot (x - 0) = x.$$

- si  $1 < x \leq 2$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= 1 \cdot (1 - 0) + (-2) \cdot (x - 1) = 3 - 2x. \end{aligned}$$

- si  $2 < x \leq 4$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \\ &= 1 \cdot (1 - 0) + (-2) \cdot (2 - 1) + 4 \cdot (x - 2) \\ &= 4x - 9. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, nous avons

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4x - 9 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

De plus  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 - 2x = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$ .

et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 - 2x = -1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4x - 9 = \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x)$ . Ainsi,  $F$  est continue sur  $[0, 4]$ .

Par contre  $F$  n'est pas dérivable en  $x = 1$ . En effet

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \neq -2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3 - 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}.$$

$F$  n'est pas non plus dérivable en  $x = 2$ . En effet

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 - 2x - (-1)}{x - 2} = -2 \neq 4 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 9 - (-1)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2}. \end{aligned}$$

### Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_1^3 |2t - 5| dt,$

b)  $\int_0^\pi \sqrt{E(t)} dt,$  (E partie entière)

c)  $\int_0^\pi \min(2, t) dt,$

d)  $\int_{-1}^2 t|t| dt.$

### Solution

1. Notons que

$$|2t - 5| = \begin{cases} 5 - 2t & \text{si } 1 \leq t \leq \frac{5}{2}, \\ 2t - 5 & \text{si } \frac{5}{2} \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la **relation de Chasles**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_1^3 |2t - 5| dt &= \int_1^{\frac{5}{2}} |2t - 5| dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 |2t - 5| dt \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} 5 - 2t dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 2t - 5 dt. \end{aligned}$$

— une primitive de  $f(t) = 5$  est  $5t$ . En effet  $(5t)' = 5$

— une primitive de  $f(t) = 2t$  est  $t^2$ . En effet  $(t^2)' = 2t$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_1^3 |2t - 5| dt &= \int_1^{\frac{5}{2}} 5 - 2t dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 2t - 5 dt \\ &= [5t - t^2]_1^{\frac{5}{2}} + [t^2 - 5t]_{\frac{5}{2}}^3 \\ &= \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4}\right) - (5 - 1) + (9 - 15) - \left(\frac{25}{4} - \frac{25}{2}\right) \\ &= \frac{25}{2} - 10 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

2. On a

$$\sqrt{E(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ \sqrt{2} & \text{si } 2 \leq t < 3, \\ \sqrt{3} & \text{si } 3 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la **relation de Chasles**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{E(t)} dt &= \int_0^1 \sqrt{E(t)} dt + \int_1^2 \sqrt{E(t)} dt + \int_2^3 \sqrt{E(t)} dt + \int_3^\pi \sqrt{E(t)} dt \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_1^2 1 dt + \int_2^3 \sqrt{2} dt + \int_3^\pi \sqrt{3} dt \\ &= 0 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (2 - 1) + \sqrt{2} \cdot (3 - 2) + \sqrt{3} \cdot (\pi - 3) \\ &= 1 + \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3}\pi.\end{aligned}$$

3. Notons que

$$\min(2, t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2, \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la **relation de Chasles**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \min(2, t) dt &= \int_0^2 \min(2, t) dt + \int_2^\pi \min(2, t) dt \\ &= \int_0^2 t dt + \int_2^\pi 2 dt.\end{aligned}$$

Or une primitive de  $f(t) = t$  est  $\frac{t^2}{2}$ . En effet  $\left(\frac{t^2}{2}\right)' = t$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \min(2, t) dt &= \int_0^2 t dt + \int_2^\pi 2 dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^2 + 2 \cdot (\pi - 2) \\ &= \left( \frac{4}{2} - 0 \right) + 2 \cdot (\pi - 2) \\ &= 2\pi - 2.\end{aligned}$$

4. Notons que

$$t|t| = \begin{cases} -t^2 & \text{si } -1 \leq t \leq 0, \\ t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la **relation de Chasles**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 t|t| dt &= \int_{-1}^0 t|t| dt + \int_0^2 t|t| dt \\ &= \int_{-1}^0 -t^2 dt + \int_0^2 t^2 dt.\end{aligned}$$

Or, une primitive de  $f(t) = t^2$  est  $\frac{t^3}{3}$ . En effet  $\left(\frac{t^3}{3}\right)' = t^2$ .

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 t|t| dt &= \int_{-1}^0 -t^2 dt + \int_0^2 t^2 dt \\ &= \left[ -\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^2 \\ &= -\left(0 - \frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

---

### **Exercice 3**

a)  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

b)  $\int 3x\sqrt{1+x^2} dx$

c)  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

d)  $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} dx$

e)  $\int \cos(x) \sin^2(x) dx$

f)  $\int \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3} dx$

g)  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}} dx$

h)  $\int \frac{1}{x \ln(x^2)} dx$

i)  $\int (3x-1)(3x^2-2x+3) dx$

j)  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

k)  $\int (1-\cos(3x)) dx$

l)  $\int x \sin(x^2) dx$

m)  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

### Solution

$$\text{a) } \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

$$\text{b) } \int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x)$$

$$\text{d) } \int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} dx = \frac{1}{3} \ln(1+e^{3x})$$

$$\text{e) } \int \cos(x) \sin^2(x) dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3$$

$$\text{f) } \int \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3} dx = -\frac{1}{6(x^3-3x+1)^2}$$

$$\text{g) } \int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}} dx = \sqrt{x(x-2)}$$

$$\text{h) } \int \frac{1}{x \ln(x^2)} dx = \frac{1}{2} \ln(\ln x^2)$$

$$\text{i) } \int (3x-1)(3x^2-2x+3) dx = \frac{1}{4}(3x^2-2x+3)^2$$

$$\text{j) } \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln(x))^2$$

$$\text{k) } \int (1-\cos(3x)) dx = x - \frac{1}{3} \sin(3x)$$

$$\text{l) } \int x \sin(x^2) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$$

$$\text{m) } \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$$

---

**Exercice 4** (*Intégration par parties*)

Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int e^x \cos x dx & \text{b) } \int \frac{\ln x}{x^n} dx \text{ avec } n > 1 & \text{c) } \int x \arctan x dx \\ \text{d) } \int (x^2 + x + 1) e^x dx & \text{e) } \int e^{-x} \sin x dx & \text{f) } \int (\ln x)^2 dx \\ \text{g) } \int \arctan x dx & \text{h) } \int x^3 \sin x dx & \end{array}$$

**Solution**

1.  $\int e^x \cos x dx$  : Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{array}{ll} u(x) = e^x & u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin x & v'(x) = \cos x \end{array}$$

Ainsi

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, utilisons une fois de plus la méthode d'**intégrations par parties**. Cette fois-ci posons

$$\begin{array}{ll} u(x) = e^x & u'(x) = e^x \\ v(x) = -\cos x & v'(x) = \sin x \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= -e^x \cdot \cos x - \int e^x (-\cos x) dx \\ &= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cdot \sin x - \left( -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cos x dx \right) \\ &= e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure l'égalité

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) \implies \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x).$$

2.  $\int \frac{\ln x}{x^n} dx$   $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 1$  : Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**.

Pour cela, posons

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= \frac{1}{-n+1} \cdot x^{-n+1} & v'(x) &= x^{-n} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^n} dx &= \frac{\ln x}{(1-n)x^{n-1}} - \frac{1}{1-n} \int \frac{x^{-n+1}}{x} dx \\ &= \frac{\ln x}{(1-n)x^{n-1}} - \frac{1}{1-n} \int x^{-n} dx \\ &= \frac{\ln x}{(1-n)x^{n-1}} - \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \\ &= \frac{(1-n)\ln x - 1}{(1-n)^2 x^{n-1}} \end{aligned}$$

3.  $\int x \arctan x dx$  : Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{aligned} u(x) &= \arctan x & u'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) &= \frac{x^2}{2} & v'(x) &= x \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int 1 dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + \text{cte} \\ &= \frac{(x^2+1) \arctan x - x}{2} + \text{cte}. \end{aligned}$$

4.  $\int (x^2 + x + 1)e^x dx$  : Nous avons

$$\int (x^2 + x + 1)e^x dx = \int x^2 e^x dx + \int x e^x dx + \int e^x dx.$$

D'abord

$$\int e^x dx = e^x$$

Maintenant, pour calculer les intégrales  $\int xe^x dx$  et  $\int x^2 e^x dx$  utilisons la méthode d'intégrations par parties. On commence avec  $\int xe^x dx$ . Posons

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ v(x) &= e^x & v'(x) &= e^x \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x \end{aligned}$$

Finalement, pour calculer  $\int x^2 e^x dx$ , posons

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & u'(x) &= 2x \\ v(x) &= e^x & v'(x) &= e^x \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int xe^x dx \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x + 1)e^x dx &= \int x^2 e^x dx + \int xe^x dx + \int e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + xe^x - e^x + e^x \\ &= x^2 e^x - xe^x + 2e^x \\ &= (x^2 - x + 2)e^x \end{aligned}$$

5.  $\int e^{-x} \sin x dx$

On a  $\begin{aligned} u(x) &= \sin x & u'(x) &= \cos x \\ v(x) &= -e^{-x} & v'(x) &= e^{-x} \end{aligned}$  et

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\sin x e^{-x} - \int -e^{-x} \cos x dx = -\sin x e^{-x} + \int e^{-x} \cos x dx$$

On a  $\begin{aligned} u(x) &= \cos x & u'(x) &= -\sin x \\ v(x) &= -e^{-x} & v'(x) &= e^{-x} \end{aligned}$  et

$$\int e^{-x} \cos x dx = -\cos x e^{-x} - \int e^{-x} \sin x dx$$

On a donc  $\int e^{-x} \sin x dx = -\sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} - \int e^{-x} \sin x dx$

Donc  $\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$



$$6. \int (\ln x)^2 dx$$

$$\text{On a } \begin{array}{l} u(x) = (\ln x)^2 \\ v(x) = x \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} u'(x) = \frac{2}{x} \ln x \\ v'(x) = 1 \end{array}$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x dx = x(\ln x)^2 + 2x(\ln x - 1)$$

$$7. \int \arctan x dx$$

$$\text{On a } \begin{array}{l} u(x) = \arctan x \\ v(x) = x \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 \end{array}$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$8. \int x^3 \sin x dx$$

$$\text{On a } \begin{array}{l} u(x) = x^3 \\ v(x) = -\cos x \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \sin x \end{array}$$

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x - 3 \int -x^2 \cos x dx$$

$$\text{On a } \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v(x) = \sin x \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v'(x) = \cos x \end{array}$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

$$\text{On a } \begin{array}{l} u(x) = x \\ v(x) = -\cos x \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin x \end{array}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

Donc

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin x dx &= -x^3 \cos x + 3(x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x)) \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x \end{aligned}$$


---

### Exercice 5

Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x}) \quad b) \int (\arcsin x)^2 dx$$

$$c) \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx.$$

$$d) \int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx$$

$$e) \int \cos \sqrt{x} dx.$$

$$f) \int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$g) \int \frac{e^{\tan x}}{(\cos x)^2} dx$$

$$h) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

### Solution

1.  $\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x}) :$

Comme indiqué, posons

$$t = \sqrt[6]{2+x} \implies x = t^6 - 2 \implies dx = 6t^5 dt.$$

$$\text{De plus } \sqrt{2+x} = \left(\sqrt[6]{2+x}\right)^3 \implies \sqrt{2+x} = t^3.$$

$$\text{De même } \sqrt[3]{2+x} = \left(\sqrt[6]{2+x}\right)^2 \implies \sqrt[3]{2+x} = t^2.$$

$$\text{Ainsi } \int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx = \int \frac{6t^5}{t^2 + t^3} dt = 6 \int \frac{t^3}{1+t} dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx &= 6 \int \frac{t^3}{1+t} dt \\ &= 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{1+t} dt \\ &= 6 \int \frac{t^3 + 1}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt \\ &= 6 \int \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{1+t} dt - 6 \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= 6 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right) - 6 \ln(|1+t|) + \text{cte} \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln(|1+t|) + \text{cte} \\ &= 2\sqrt{2+x} - 3\sqrt[3]{2+x} + 6\sqrt[6]{2+x} - 6 \ln \left( \left| 1 + \sqrt[6]{2+x} \right| \right) + \text{cte} \end{aligned}$$

2.  $\int (\arcsin x)^2 dx$  : Utilisons la méthode d' **intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{aligned} u(x) &= (\arcsin x)^2 & u'(x) &= \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v(x) &= x & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, utilisons une fois de plus la méthode d' **intégrations par parties**. Cette fois-ci posons

$$\begin{aligned} u(x) &= \arcsin x & u'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v(x) &= -\sqrt{1-x^2} & v'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\arcsin x \sqrt{1-x^2} - \int -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\arcsin x \sqrt{1-x^2} + \int 1 dx \\ &= -\arcsin x \sqrt{1-x^2} + x + \text{cte.}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x(\arcsin x)^2 - 2 \left( -\arcsin x \sqrt{1-x^2} + x + \text{cte} \right) \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2 \arcsin x \sqrt{1-x^2} - 2x + \text{cte.}\end{aligned}$$

3.  $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx$  : À l'aide du changement de variable

$$1+x^3 = u \implies 3x^2 dx = du \implies x^2 dx = \frac{du}{3}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx &= \int \frac{1}{3} \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{cte} \\ &= \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + \text{cte} \\ &= \frac{2}{9} (1+x^3)^{\frac{3}{2}} + \text{cte.}\end{aligned}$$

4. On effectue un changement de variables :  $u = \sqrt{e^x - 1}$  il vient  $u^2 = e^x - 1$  et  $e^x = u^2 + 1$  d'où  $2udu = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx = \int \frac{2udu}{(3+u^2+1)u} = \int \frac{2du}{4+u^2} = 2 \arctan \frac{u}{2} = \arctan \left( \sqrt{\frac{e^x-1}{2}} \right)$$

5.  $\int \cos \sqrt{x} dx$  on pose  $w = \sqrt{x}$  donc  $w^2 = x$  donc  $2w dw = dx$

$$\int \cos \sqrt{x} dx = 2 \int w \cos w dw$$

On effectue une intégration par partie :

$$\text{On a } \begin{matrix} u(w) = w & u'(w) = 1 \\ v(w) = \sin w & v'(w) = \cos w \end{matrix} \text{ et}$$

$$\int w \cos w dw = w \sin w - \int \sin w dw = w \sin w + \cos w$$

$$\text{On a donc } \int \cos \sqrt{x} dx = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x}$$

$\sqrt{x} = u$  .  $2udu = dx$

$$6. \int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + 2e^{\sqrt{x}}$$

$$7. \int \frac{e^{\tan x}}{(\cos x)^2} dx = \int e^{\tan(x)} \tan'(x) dx = e^{\tan(x)}$$

$$8. \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\text{On a } \begin{cases} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v(x) = \sqrt{1+x^2} & v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \text{ et}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = x^2 \sqrt{1+x^2} - 2 \int x \sqrt{1+x^2} dx = x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$


---

### Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$b) \int_0^a \sqrt{a^2-t^2} dt$$

$$c) \int_0^\pi t^2 \sin t dt$$

$$d) \int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos \sqrt{1-t} dt$$

$$e) \int_{-1}^1 \frac{t-1}{1+t^2} dt$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\sin t}$$

$$g) \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$$

$$h) \int_1^4 \frac{dt}{1+e^t}$$

$$i) \int_0^1 t(\arctan t)^2 dt$$

### Solution

$$a) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt : \text{À l'aide du changement de variable :}$$

$$1-t^2 = u \implies -2t dt = du,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_1^0 \frac{-1}{2\sqrt{u}} du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{u}} du \\ &= [\sqrt{u}]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$b) \int_0^a \sqrt{a^2-t^2} dt : \text{Nous avons}$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-t^2} dt = \int_0^a a \sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2} dt = a \int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2} dt.$$

Ainsi, à l'aide du changement de variable :

$$\frac{t}{a} = u \implies \frac{dt}{a} = du,$$

nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} dt &= a \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2} dt \\ &= a^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du.\end{aligned}$$

Maintenant, en effectuant le changement de variable

$$u = \sin x \implies du = \cos x dx$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x) + 1}{2} dx\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} dt &= a^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x) + 1}{2} dx \\ &= a^2 \left[ \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{a^2 \pi}{2}.\end{aligned}$$

c)  $\int_0^\pi t^2 \sin t dt$  : Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{aligned}u(t) &= t^2 & u'(t) &= 2t \\ v(t) &= -\cos t & v'(t) &= \sin t\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2 \sin t dt &= [-t^2 \cdot \cos t]_0^\pi + 2 \int_0^\pi t \cos t dt \\ &= \pi^2 + 2 \int_0^\pi t \cos t dt.\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, utilisons une fois de plus la méthode d'**intégrations par parties**. Cette fois-ci posons

$$\begin{aligned}u &= t & du &= dt \\ dv &= \cos t dt & v &= \sin t\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^\pi t \cos t \, dt = [t \cdot \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t \, dt = [\cos t]_0^\pi = -2.$$

Par conséquent

$$\int_0^\pi t^2 \sin t \, dt = \pi^2 + 2 \int_0^\pi t \cos t \, dt = \pi^2 - 4.$$

d)  $\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos \sqrt{1-t} \, dt$  : En effectuant le changement de variable

$$x = \sqrt{1-t} \implies t = 1-x^2 \implies dt = -2x dx$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos \sqrt{1-t} \, dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x \cdot (-2x) \, dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx \\ &\stackrel{\text{IPP = voir point précédent}}{=} 2 [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\ &= \pi + 2 [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi - 2. \end{aligned}$$

$$\text{e) } \int_{-1}^1 \frac{t-1}{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{1+t^2} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = -2 \arctan 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\sin t} &= \int_0^1 \frac{2dx}{(1+x^2)(2+\frac{2x}{1+x^2})} = \int_0^1 \frac{2dx}{2x^2+2x+2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right. \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan(\sqrt{3}) - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{g) } \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_1^4 - 3 = 4 - 2 - 3 = -1$$

$$\text{h) } \int_1^4 \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^4 \frac{e^{-t} dt}{1+e^{-t}} = [-\ln(1+e^{-t})]_1^4 = \ln(1+e^{-1}) - \ln(1+e^{-4})$$

i) On a

$$\begin{aligned} \int t(\arctan t)^2 dx &= \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - \int \left( \frac{t^2}{1+t^2} \right) \arctan t \, dt = \\ &= \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - \int \arctan t \, dt + \int \left( \frac{1}{1+t^2} \right) \arctan t \, dt \\ &= \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - \int \arctan t \, dt + \frac{1}{2}(\arctan t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{On a } \begin{cases} u(t) = \arctan t \\ v(t) = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = 1 \end{cases} \\
= \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - t \arctan t + \int \frac{t}{1+t^2} dt + \frac{1}{2}(\arctan t)^2 \\
= \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - t \arctan t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \frac{1}{2}(\arctan t)^2 \\
\text{Donc } \int_0^1 t(\arctan t)^2 dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2
\end{aligned}$$


---

### Exercice 7

Considérons l'intégrale  $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

Effectuer le changement de variables  $u = \sqrt{e^x - 1}$  et calculer  $I$ .

### Solution

**Solution :** Comme indiqué, on fait le changement de variable

$$u = \sqrt{e^x - 1} \implies u^2 = e^x - 1 \implies x = \ln(u^2 + 1).$$

$$\text{D'où } dx = \frac{2u}{u^2 + 1} du$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= \int_0^1 u \cdot \frac{2u}{u^2 + 1} du \\
&= 2 \int_0^1 \frac{u^2}{u^2 + 1} du \\
&= 2 \int_0^1 \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1} du \\
&= 2 \int_0^1 \left( \frac{u^2 + 1}{u^2 + 1} - \frac{1}{u^2 + 1} \right) du.
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= 2 \int_0^1 \frac{u^2 + 1}{u^2 + 1} - \frac{1}{u^2 + 1} du \\
&= 2 \int_0^1 1 du - 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du \\
&= 2[u]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du = 2 - 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du.
\end{aligned}$$

On connaît une primitive de  $\frac{1}{u^2 + 1}$

En effet  $(\arctan(u))' = \frac{1}{1 + u^2}$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= 2 - 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= 2 - 2 [\arctan(u)]_0^1 \\ &= 2 - 2 \arctan(1) + 2 \arctan(0) = 2 - \frac{2\pi}{4} + 2 \cdot 0 = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

### Exercice 8

1. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Montrer que  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$

En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx$

2. Montrer que

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx = \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{1}{a}\right)$$

pour  $a > 1$ , (Indication : utiliser la formule  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ , pour  $x > 0$ ).

### Solution

On effectue le changement de variables :  $u = a + b - x$  d'où  $du = -dx$

$$\int_a^b f(a + b - x) dx = \int_b^a f(u) (-du) = - \int_b^a f(u) du = \int_a^b f(u) du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x + \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + 0 - x \right) \right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

$$= \frac{\pi \ln 2}{8}$$

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx \text{ on effectue le changement de variable : } u = \frac{1}{x} \text{ donc } du = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx = \int_a^{\frac{1}{a}} (1 + u^2) \left(\arctan \frac{1}{u}\right) \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_a^{\frac{1}{a}} (1 + u^2) \left(\arctan \frac{1}{u}\right) \left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan u\right) du$$



$$\text{Il vient } \int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) = \frac{\pi}{4} \left( \left(a - \frac{1}{a}\right) + \left(-\frac{1}{a} + a\right) \right) = \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{1}{a}\right)$$


---

### Exercice 9

Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

|  |   |                                   |
|--|---|-----------------------------------|
| a) $\frac{x^3}{x^2 - 4}$                 | b) $\frac{4x}{(x - 2)^2}$                                     | c) $\frac{3t + 1}{t^2 - 2t + 10}$ |
| d) $\frac{1}{t^3 + 1}$                   | e) $\frac{x^3 + 2}{(x + 1)^2}$                                | f) $\frac{x + 1}{x(x - 2)^2}$     |
| g) $\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}$ | h) $\frac{3x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 11x + 7}{(x - 1)^3(x^2 + 1)}$ |                                   |

### Solution

1. On commence par donner la décomposition en éléments simples de  $\frac{x^3}{x^2 - 4}$ , nous avons

$$\frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 2}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx &= \int x + \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \ln(|x - 2|) + 2 \ln(|x + 2|) + \text{cte} \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln((x^2 - 4)^2) + \text{cte}. \end{aligned}$$

2. On commence par donner la décomposition en éléments simples de  $\frac{4x}{(x - 2)^2}$ , nous avons

$$\frac{4x}{(x - 2)^2} = \frac{4}{x - 2} + \frac{8}{(x - 2)^2}$$

Par conséquent

$$\int \frac{4x}{(x - 2)^2} dx = \int \frac{4}{x - 2} + \frac{8}{(x - 2)^2} dx = 4 \ln|x - 2| - \frac{8}{x - 2} + \text{cte}.$$

3. Notons que  $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$  est un élément simple. Calculons sa primitive. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3t+1}{t^2-2t+10} dt &= \int \frac{3t}{t^2-2t+10} dt + \int \frac{1}{t^2-2t+10} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{2t-2+2}{t^2-2t+10} dt + \int \frac{1}{(t^2-2t+1)+9} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{2t-2}{t^2-2t+10} dt + \int \frac{4}{(t^2-2t+1)+9} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{2t-2}{t^2-2t+10} dt + 4 \int \frac{1}{(t-1)^2+9} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{2t-2}{t^2-2t+10} dt + \frac{4}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{3}\right)^2+1} dt \\
 &= \frac{3}{2} \ln(t^2-2t+10) + \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{t-1}{3}\right) + \text{cte.}
 \end{aligned}$$

4. On commence par donner la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{t^3+1}$ , nous avons

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{t^3+1} dx &= \int \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)} dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln|t+1| - \frac{1}{6} \ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cte.}
 \end{aligned}$$

5.  $R(x) = \frac{x^3+2}{(x+1)^2} = \frac{P(x)}{Q(x)}$

La division euclidienne donne :  $x^3+2 = (x-2)(x^2+2x+1) + (3x+4)$

Le coefficient de  $\frac{1}{(x+1)^2}$  est 1 (on remplace  $x$  par  $-1$  dans le numérateur).

On calcule  $\frac{3x+4}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1}$

Donc  $\frac{x^3+2}{(x+1)^2} = x-2 + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

Donc une primitive est  $\frac{x^2}{2} - 2x + 3 \ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$

6. Primitive de  $\frac{x+1}{x(x-2)^2}$

Le coefficient de  $\frac{1}{x}$  est  $\frac{1}{4}$  (on remplace  $x$  par  $-1$  dans  $\frac{x+1}{(x-2)^2}$ ).

Le coefficient de  $\frac{1}{(x-2)^2}$  est  $\frac{3}{2}$  (on remplace  $x$  par  $-1$  dans  $\frac{x+1}{x}$ ).

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{4x} - \frac{3}{2(x-2)^2} = \frac{4x+4-x^2+4x-4-6x}{4x(x-2)^2} = \frac{-x+2}{4(x-2)^2} = -\frac{1}{4(x-2)}$$

Donc  $\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{4x} + \frac{3}{2(x-2)^2} - \frac{1}{4(x-2)}$

Une primitive est  $\frac{1}{4} \ln x - \frac{3}{2(x-2)} - \frac{1}{4} \ln(x-2)$

7.  $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)}$  Le coefficient de  $\frac{1}{(x-1)^2}$  est  $-\frac{1}{2}$  (on remplace  $x$  par  $-1$  dans  $\frac{x^2-2x}{(x^2+1)}$ ).

Le coefficient de  $\frac{1}{x-i}$  est  $\frac{-1-2i}{(i-1)^2 2i} = -\frac{1+2i}{4}$  (on remplace  $x$  par  $i$  dans  $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x+i)}$ ).

Donc  $-\frac{1+2i}{4(x-i)} - \frac{1-2i}{4(x+i)} = -\frac{(1+2i)(x+i) + (1-2i)(x-i)}{x^2+1} = -\frac{x-2}{2(x^2+1)}$

Enfin

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{x-2}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{2x^2-4x+x^2+1+(x-2)(x^2-2x+1)}{2(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{2x^2-4x+x^2+1+x^3-4x^2+5x-2}{2(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{x^3-x^2+x-1}{2(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(x^2+1)x-(x^2+1)}{2(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(x^2+1)(x-1)}{2(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{4(x-1)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)} &= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4(x-1)} \\ &= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4(x-1)} \end{aligned}$$

Une primitive est  $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \arctan x + \frac{1}{4} \ln(x-1)$

### Exercice 10

Soit  $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ .

1. Établir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
2. Calculer  $I_n$ .
3. En déduire  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$ .

### Solution

1. Utilisons la méthode d'intégrations par parties. Pour cela, posons

$$\begin{aligned} u(t) &= (1-t^2)^{n+1} & u'(t) &= -2(n+1)t(1-t^2)^n \\ v(t) &= t & v'(t) &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt &= [t(1-t^2)^{n+1}]_0^1 + 2(n+1) \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \\ &= 0 + 2(n+1) \int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^n dt \\ &= 2(n+1) \int_0^1 -(1-t^2)^{n+1} + (1-t^2)^n dt.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt &= 2(n+1) \int_0^1 -(1-t^2)^{n+1} + (1-t^2)^n dt \\ &= -2(n+1) \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt + 2(n+1) \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= -2(n+1)I_{n+1} + 2(n+1)I_n.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$I_{n+1} = -2(n+1)I_{n+1} + 2(n+1)I_n \implies I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}I_n.$$

2. Calculer  $I_n$  : À l'aide de l'identité précédente, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{2(n-1)+2}{2(n-1)+3}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2} \\ &\vdots \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}I_0\end{aligned}$$

Finalement

$$I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 dt = \int_0^1 1 dt = (1-0) \cdot 1 = 1.$$

Par conséquent

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

3. En déduire  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$  : D'après le binôme de Newton, nous pouvons écrire

$$(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t^2)^n dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left[ \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} &= \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= I_n \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Exercice 11** *Intégrales de Wallis*

Soit  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ .

$$I_{m+n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+n} t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^{n+1} t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t \sin t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} t \cos^n t dt$$

1. Établir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ .
2. En déduire  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$ .
3. Montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que  $I_n \sim I_{n+1}$ .
5. Calculer  $nI_n I_{n+1}$ .
6. Donner alors un équivalent simple de  $I_n$ .

**Solution**

1. Utilisons la méthode d'intégrations par parties. Pour cela, posons

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin^{n+1} t & u'(t) &= (n+1) \sin^n t \cos t dt \\ v(t) &= -\cos t & v'(t) &= \sin t \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt &= [-\sin^{n+1} t \cdot \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt. \end{aligned}$$

D'où

$$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \implies I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

2. En déduire  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$  : En utilisant l'égalité  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \cdot I_{2p-2} \\ &= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot I_{2p-4} \\ &\vdots \\ &= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \cdot I_{2p-1} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdot I_{2p-3} \\ &\vdots \\ &= \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1. \end{aligned}$$

Or

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p-1) \cdot (2p-3) \cdots 3 \cdot 1}{2p \cdot (2p-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} &= \frac{2p \cdot (2p-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2p+1) \cdot (2p-1) \cdots 5 \cdot 3} \cdot 1. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} 2p \cdot (2p-2) \cdots 4 \cdot 2 &= 2^p \cdot p \cdot (p-1) \cdots 2 \cdot 1 \\ &= 2^p \cdot p! \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (2p-1) \cdot (2p-3) \cdots 3 \cdot 1 &= \frac{(2p)!}{2p \cdot (2p-2) \cdots 4 \cdot 2} \\ &= \frac{(2p)!}{2^p \cdot p!}. \end{aligned}$$

Donc

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

3. Montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et strictement positive : Pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sin x \geq 0 &\implies \forall n \in \mathbb{N}, \sin^n x \geq 0 \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx > 0 \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin x \leq 1 &\implies \forall n \in \mathbb{N}, \sin^n x \geq \sin^{n+1} x \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx > 0 \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq I_{n+1} > 0 \\ &\implies (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

4. En déduire que  $I_n \sim I_{n+1}$  : D'après la question précédente, nous avons

$$0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \implies \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

Or  $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ . Donc

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 &\implies 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \\ &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \\ &\implies I_n \sim I_{n+1}. \end{aligned}$$

5. Calculer  $nI_n I_{n+1}$  : D'après la question 2, nous avons

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Donc

$$(2p-1) \cdot I_{2p-1} \cdot I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad 2p \cdot I_{2p} \cdot I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

C'est-à-dire

$$nI_n \cdot I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

6. Donner alors un équivalent simple de  $I_n$  : D'après la question précédente, nous avons

$$nI_n \cdot I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \implies I_n \cdot I_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

De plus

$$\begin{aligned} I_n \sim I_{n+1} &\implies I_n^2 \sim I_n \cdot I_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &\implies I_n^2 \sim \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &\implies I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \\ &\implies I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

---

### Exercice 12

Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ .
2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$ .
3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

### Solution

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$  : Pour tout  $x \geq 0$ , on a

$$1 \leq x+1 \implies \frac{1}{1+x} \leq 1 \implies \forall n \in \mathbb{N}, \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$



2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$  : Nous avons :

$$\begin{aligned}
 I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx \\
 &= \int_0^1 x^n \cdot \frac{1+x}{1+x} dx \\
 &= \int_0^1 x^n dx \\
 &= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  : Par la question précédente, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \\
 &= (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots \pm (I_{n-1} + I_n) \\
 &\stackrel{\text{somme télescopique}}{=} I_0 + (I_1 - I_1) + (I_2 - I_2) + \cdots + (I_{n-1} - I_{n-1}) \pm I_n \\
 &= I_0 \pm I_n.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I_0 \pm I_n \\
 &= I_0 \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \\
 &= I_0 + 0 \\
 &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \\
 &= [\ln(x+1)]_0^1 \\
 &= \ln 2.
 \end{aligned}$$

### **Exercice 13** Séries de Riemann

Calculer :

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$

## Solution

1. On a  $\ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$

On reconnaît une somme de Riemann pour la fonction  $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$  donc la

somme tend vers  $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$

On effectue une intégration par partie :

On a  $\begin{aligned} u(x) &= \ln(1 + x^2) & \text{et} & \quad u'(t) = \frac{2x}{1 + x^2} \\ v(x) &= x & & \quad v'(t) = 1 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx &= [x \ln(1 + x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1 + x^2} dx = \ln 2 - 2 \left( \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \right) \\ &= \ln 2 - 2(1 + \arctan 1) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc par composition  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}$

2. On a  $n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

On reconnaît une somme de Riemann qui tend donc vers

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left[ e^{-\frac{1}{x}} \right]_0^1 = e^{-1}$$

3. On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On reconnaît une somme de Riemann qui tend donc vers

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 + [\arctan x]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$  On reconnaît une somme de

Riemann qui tend donc vers  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

---

## Exercice 14

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{n}{n^2 + p^2}$ .

### Solution

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$  : On commence par noter que :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \\ &= \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{0 + k \frac{(1-0)}{n}}. \end{aligned}$$

En posant  $f(x) = \sqrt{x}$  nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à  $\int_0^1 f(x)dx$ . Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Maintenant, la somme de Riemann  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$  converge vers  $\int_0^1 f(x)dx$ , ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{n}{n^2 + p^2}$  : On commence par noter que :

$$\sum_{p=1}^n \frac{n}{n^2 + p^2} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{n}\right)^2} = \frac{(1-0)}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{1 + \left(0 + p \frac{(1-0)}{n}\right)^2}.$$

En posant  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à  $\int_0^1 f(x)dx$ . Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Maintenant, la somme de Riemann  $\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{n}\right)^2}$  converge vers  $\int_0^1 f(x)dx$ , ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{n}{n^2 + p^2} = \frac{\pi}{4}.$$

---

### Exercice 15

Sans calculer les intégrales, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

### Solution

À l'aide du changement de variable

$$x = \frac{\pi}{2} - u \implies dx = -du,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx &= \int_{\pi/2}^0 \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - u \right) (-du) \\ &= - \int_{\pi/2}^0 \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - u \right) du \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - u \right) du \end{aligned}$$

Maintenant

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} - u \right) = \cos u.$$

Donc

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - u \right) du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u \, du = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

---

### Exercice 16

Soit  $f \in C^0(\mathbb{R})$ . On définit  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en 0.

2. On suppose  $f$   $T$ -périodique. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{kT}^{(k+1)T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$ .

3. Ecrire  $g(x)$  sous la forme  $\frac{1}{x} \int_0^{nT} f(t) dt + \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t) dt$  pour un entier  $n$  bien choisi, et en déduire que  $g$  admet une limite en  $+\infty$ .

### Exercice 17

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1.  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f$ .
3. Si  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
4. Si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
5. Si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
6. Si  $f$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .
7. Si  $f$  est paire alors  $F$  est impaire.

### Solution

1.  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Vrai :  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f$ . Pour plus de détails voir cours.
2.  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f$ . Vrai : Voir cours.
3. Si  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . Faux : En effet, posons  $f(x) = x$ . Alors

$$F(x) = \int_0^x t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} - 0 = \frac{x^2}{2}.$$

qui est décroissante sur  $] -\infty, 0]$  et croissante sur  $[0, +\infty[$ .

4. Si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est positive sur  $\mathbb{R}$ . Faux : En effet, posons  $f(x) = x^2$ . Alors

$$F(x) = \int_0^x t^2 \, dt = \frac{x^3}{3}.$$

qui est négative sur  $] -\infty, 0]$  et positive sur  $[0, +\infty[$ .

5. Si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . Vrai : En effet, soit  $x < y$ , alors

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_0^y f(t) \, dt - \int_0^x f(t) \, dt \\ &= \int_0^x f(t) \, dt + \int_x^y f(t) \, dt - \int_0^x f(t) \, dt \\ &= \int_x^y f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \forall t \in [x, y], \quad f(t) \geq 0 &\implies \int_x^y f(t) \, dt \geq 0 \\ &\implies F(y) - F(x) \geq 0 \\ &\implies F \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

**Deuxième méthode** : Nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = f(x) \geq 0.$$

Donc  $F$  est croissante.

6. Si  $f$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . Faux : En effet, posons  $f(x) = 1 + \cos(x)$ . Alors

$$F(x) = \int_0^x 1 + \cos(t) dt = [t + \sin(t)]_0^x = x + \sin(x) - (0 + \sin(0)) = x + \sin(x).$$

qui n'est pas périodique.

7. Si  $f$  est paire alors  $F$  est impaire. Vrai : En effet, nous avons

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt.$$

En faisant le changement de variable

$$t = -u \implies dt = -du$$

nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \\ &= \int_0^x f(-u)(-du) \\ &\stackrel{\underbrace{\quad}_{f \text{ est paire}}}{=} - \int_0^x f(u) du \\ &= -F(x). \end{aligned}$$

De plus  $F(0) = 0$ .  $F$  est donc impaire.

### Exercice 18

Déterminer les fonctions  $f$  continues sur  $[a, b]$  telles que  $\int_a^b f(t) dt = (b - a) \sup_{[a,b]} |f|$ .

### Solution

Tout d'abord, notons que

$$b - a = \int_a^b 1 dt.$$

La linéarité de l'intégrale, nous permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} (b - a) \sup_{[a,b]} |f| &= \sup_{[a,b]} |f| \int_a^b 1 dt \\ &= \int_a^b \sup_{[a,b]} |f| dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= (b-a) \sup_{[a,b]} |f| \iff \int_a^b \sup_{[a,b]} |f| = \int_a^b f(t)dt \\ &\iff \int_a^b \sup_{[a,b]} |f| - \int_a^b f(t)dt = 0 \\ &\iff \int_a^b \sup_{[a,b]} |f| - f(t)dt = 0.\end{aligned}$$

Or

$$\forall t \in [a, b], \quad \sup_{[a,b]} |f| \geq f(t).$$

La fonction

$$t \longmapsto \sup_{[a,b]} |f| - f(t),$$

est donc continue et positive sur  $[a, b]$ , d'intégrale nulle sur  $[a, b]$ . Par conséquent

$$\forall t \in [a, b], \quad \sup_{[a,b]} |f| - f(t) = 0.$$

D'où on conclut

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= (b-a) \sup_{[a,b]} |f| \iff \forall t \in [a, b], \quad f(t) = \sup_{[a,b]} |f| \\ &\iff f \text{ est constante.}\end{aligned}$$

---

### **Exercice 19**

Soit  $f \in C^0(\mathbb{R})$ . On définit  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ .

1. Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en 0.

2. On suppose  $f$   $T$ -périodique. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ .

3. Ecrire  $g(x)$  sous la forme  $\frac{1}{x} \int_0^{nT} f(t)dt + \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t)dt$  pour un entier  $n$  bien choisi, et en déduire que  $g$  admet une limite en  $+\infty$ .

### **Solution**

1. Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en 0 : On doit montrer que la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$$

existe. Posons

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \implies F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \\ &= F'(0) = f(0). \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut prolonger  $g$  en posant

$$g(0) = f(0).$$

2. On suppose  $f$   $T$ -périodique. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

À l'aide du changement de variable

$$t = u + kT \implies dt = du.$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt &= \int_0^T f(u + kT)du \\ &\stackrel{\substack{= \\ f \text{ est } T\text{-périodique}}}{=} \int_0^T f(u)du \\ &= \int_0^T f(t)dt. \end{aligned}$$

3. Ecrire  $g(x)$  sous la forme  $\frac{1}{x} \int_0^{nT} f(t)dt + \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t)dt$  pour un entier  $n$  bien choisi, et en déduire que  $g$  admet une limite en  $+\infty$ .

L'idée, c'est de choisir  $n$  de sorte d'avoir

$$nT \leq x < nT + T.$$

Pour cela, posons

$$n = E\left(\frac{x}{T}\right).$$

Alors

$$n \leq \frac{x}{T} < n+1 \implies nT \leq x < nT + T.$$



Maintenant

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \left( \int_0^{nT} f(t) dt + \int_{nT}^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{nT} f(t) dt + \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t) dt \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{nT} f(t) dt + \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t) dt.$$

Étudions donc les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{nT} f(t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t) dt.$$

On commence par noter que

$$\begin{aligned} \left| \int_{nT}^x f(t) dt \right| &\leq \int_{nT}^x |f(t)| dt \quad \underbrace{\leq}_{\substack{\text{car} \\ |f| \geq 0}} \int_{nT}^{nT+T} |f(t)| dt \\ &\quad \underbrace{=}_{\text{d'après le point 2.}} \int_0^T |f(t)| dt = \text{cte.} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left| \int_{nT}^x f(t) dt \right| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^T |f(t)| dt = 0.$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t) dt = 0.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_0^{nT} f(t) dt &= \int_0^T f(t) dt + \int_T^{2T} f(t) dt + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(t) dt \\ &\quad \underbrace{=}_{\text{d'après le point 2.}} \int_0^T f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \cdots + \int_0^T f(t) dt \\ &= n \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

Maintenant,  $n = E\left(\frac{x}{T}\right)$ , donc

$$\frac{x}{T} - 1 \leq n \leq \frac{x}{T}.$$

D'où

$$\frac{x-T}{T} \int_0^T f(t) dt \leq (\text{ou } \geq) n \int_0^T f(t) dt \leq (\text{ou } \geq) \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Ainsi

$$\frac{x-T}{x \cdot T} \int_0^T f(t) dt \leq (\text{ou } \geq) \frac{n}{x} \int_0^T f(t) dt \leq (\text{ou } \geq) \frac{x}{x \cdot T} \int_0^T f(t) dt.$$

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-T}{x \cdot T} = \frac{1}{T}$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{nT} f(t) dt + \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{nT} f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{nT}^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + 0 \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$


---

### Exercice 20

Si  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ , on définit

$$I(n, p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$$

1. Si  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $I(n, p)$  en fonction de  $I(n+1, p-1)$ .
2. Calculer  $I(n, p)$  pour  $n, p \in \mathbb{N}$ .

### Solution

1. On utilise une intégration par parties avec  $u : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$  et  $v : t \mapsto (1-t)^p$  qui sont de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ .

$$I(n, p) = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} (1-t)^p \right]_0^1 + \frac{p}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{p-1} dt$$

$$\text{donc } I(n, p) = \frac{p}{n+1} I(n+1, p-1).$$

2. On note pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n : \forall p \in \mathbb{N}, I(n, p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$  et on raisonne par récurrence.

— Initialisation

$$I(0, p) = \int_0^1 (1-t)^p dt$$

$$I(0, p) = \left[ \frac{-(1-t)^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

$$I(0, p) = \frac{0!p!}{(p+1)!}$$

Donc  $H_0$  est vraie.

— Hérédité

On suppose que  $H_n$  est vraie.

On utilise la formule de la question 1 en remplaçant  $p$  par  $p+1$ .

$$I(n, p+1) = \frac{p+1}{n+1} I(n+1, p)$$

$$I(n+1, p) = \frac{n+1}{p+1}$$

$$I(n, p+1) \text{ puis avec } H_n : I(n+1, p) = \frac{n+1}{p+1} \frac{(p+1)!n!}{(n+p+1+1)!}$$

$$I(n+1, p) = \frac{p!(n+1)!}{(n+p+2)!} \text{ ce qui prouve } H_{n+1}.$$

— La propriété a été démontrée par récurrence.

$$\text{En particulier, } I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

---

### Exercice 21

Si  $a < b$  et  $n, p \in \mathbb{N}$ , calculer

$$J(n, p) = \int_a^b (t-a)^n (b-t)^p dt$$

### Solution

— Recherche : On cherche un changement de variable de la forme  $t = \alpha u + \beta$  tel que  $t = a \Leftrightarrow u = 0$  et  $t = b \Leftrightarrow u = 1$ . On résout donc le système

$$\begin{cases} \beta = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases} \text{ ssi } \beta = a, \alpha = b - a$$

On obtient

$$t = (b-a)u + a$$

— Rédaction

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b], u \mapsto (b-a)u + a$$

$\varphi$  est de classe  $C^1$  et

$$J(n, p) = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t) dt$$

donne par le théorème de changement de variable :

$$J(n, p) = \int_0^1 f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

$$t - a = (b - a)u \text{ et } b - t = (b - a)(1 - u)$$

$$J(n, p) = \int_0^1 (b - a)^n u^n (b - a)^p (1 - u)^p (b - a) du$$

$$J(n, p) = (b - a)^{n+p+1} I(n, p)$$

$$J(n, p) = (b - a)^{n+p+1} \frac{p!n!}{(n + p + 1)!}$$


---

### Exercice 22

Soit  $n, p \in \mathbb{N}$ . Calculer

$$K(n, p) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) \sin^{2p+1}(\theta) d\theta$$

### Solution

La fonction  $\varphi : ]0, \pi/2[ \rightarrow ]0, 1[$ ,  $\theta \mapsto \cos^2(\theta)$  est une bijection de classe  $C^1$ . Par le

théorème de changement de variable  $I(n, p) = \int_{\varphi(\pi/2)}^{\varphi(0)} f(t) dt$

$$I(n, p) = \int_{\pi/2}^0 f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) d\theta \quad f(\varphi(\theta)) = \cos^{2n}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^p$$

$$f(\varphi(\theta)) = \cos^{2n}(\theta) \sin^2 p(\theta)$$

$$\varphi'(\theta) = -2 \sin(\theta) \cos(\theta).$$

$$f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) = -2 \cos^{2n+1}(\theta) \sin^{2p+1}(\theta)$$

$$I(n, p) = -2 \int_{\pi/2}^0 \cos^{2n+1}(\theta) \sin^{2p+1}(\theta) d\theta$$

$$I(n, p) = 2K(n, p) \text{ donc } K(n, p) = \frac{p!n!}{2(n + p + 1)!}.$$


---

### Exercice 23

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En déduire la valeur de  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u) du$

### Solution

:  $K(n, n) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) \sin^{2n+1}(\theta) d\theta$   $K(n, n) = \frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(2\theta) d\theta$  en utilisant le

changement de variable  $u = 2\theta$ ,  $2^{2n+1} K(n, n) = \int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u) 1/2 du$   $2^{2n+2} K(n, n) =$

$\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u) du$  Puis par le changement de variable  $v = \pi - u$  :  $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n+1}(u) du =$

$\int_{\pi/2}^0 \sin^{2n+1}(\pi - v)(-1) dv$   $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n+1}(u) du = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(v) dv$  et par la relation de

Chasles :  $2^{2n+2}K(n, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)du$  donc  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)du = 2^{2n+1}K(n, n)$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)du = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$


---

### Exercice 24

Si  $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ , calculer  $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$ .

### Solution

Si  $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $I(n, p) = \int_0^1 t^n(1-t)^p dt$   $I(n, p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$  Par le binôme de Newton :

$$t^n(1-t)^p = t^n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k t^k$$

$$t^n(1-t)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k t^{k+n}$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$I(n, p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left[ \frac{(-1)^k t^{n+k+1}}{n+k+1} \right]_0^1.$$

$$\text{soit } \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$$


---