Intégration

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

Solution

1. Notons que pour la subdivision de $[0,4]$ définie par $\{x_0 = 0\ ,\ x_1 = 1\ ,\ x_2 = 2\ ,\ x_3 = 4\}$, nous avons f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.
   Ainsi, f est une **fonction en escalier**. Par conséquent

$$\int_0^4 f(t)\,dt \;=\; 1\cdot(1-0) \;+\; (-2)\cdot(2-1) \;+\; 4\cdot(4-2) \;=\; 7.$$

2. En utilisant la **relation de Chasles** nous pouvons conclure :
   — si $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$F(x) \;=\; \int_0^x f(t)\;dt \;=\; 1\cdot(x-0) \;=\; x.$$

   — si $1 < x \leqslant 2$

$$\begin{aligned} F(x) \;=\; \int_0^x f(t)\;dt \;&=\; \int_0^1 f(t)\;dt \;+\; \int_1^x f(t)\;dt \\ &=\; 1\cdot(1-0) \;+\; (-2)\cdot(x-1) \;=\; 3-2x. \end{aligned}$$

   — si $2 < x \leqslant 4$

$$\begin{aligned} F(x) \;=\; \int_0^x f(t)\;dt \;&=\; \int_0^1 f(t)\;dt \;+\; \int_1^2 f(t)\;dt \;+\; \int_2^x f(t)\;dt \\ &=\; 1\cdot(1-0) \;+\; (-2)\cdot(2-1) \;+\; 4\cdot(x-2) \\ &=\; 4x-9. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, nous avons

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3-2x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4x-9 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

De plus $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1-} x = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} 3-2x = \lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$.
et $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2-} 3-2x = -1 = \lim\limits_{x\to 2^+} 4x-9 = \lim\limits_{x\to 2^+} F(x)$. Ainsi, F est continue sur $[0,4]$.
Par contre F n'est pas dérivable en $x=1$. En effet

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1 \neq -2 = \lim_{x\to 1^+} \frac{3-2x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1}.$$

F n'est pas non plus dérivable en $x=2$. En effet

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} \frac{F(x)-F(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3-2x-(-1)}{x-2} = -2 \neq 4 &= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-9-(-1)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{F(x)-F(2)}{x-2}. \end{aligned}$$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3 |2t-5|\ dt$,

b) $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{E(t)}\ dt$, (E partie entière)

c) $\displaystyle\int_0^\pi \min(2,t)\ dt$,

d) $\displaystyle\int_{-1}^2 t|t|\ dt$.

Solution

1. Notons que

$$|2t-5| = \begin{cases} 5-2t & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant \frac{5}{2}, \\ 2t-5 & \text{si } \frac{5}{2} \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la **relation de Chasles**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_1^3 |2t-5|\ dt &= \int_1^{\frac{5}{2}} |2t-5|\ dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 |2t-5|\ dt \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} 5-2t\ dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 2t-5\ dt. \end{aligned}$$

— une primitive de $f(t)=5$ est $5t$. En effet $(5t)' = 5$
— une primitive de $f(t)=2t$ est t^2. En effet $(t^2)' = 2t$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_1^3 |2t-5| \; dt &= \int_1^{\frac{5}{2}} 5-2t \; dt \; + \; \int_{\frac{5}{2}}^3 2t-5 \; dt \\
&= \left[5t-t^2\right]_1^{\frac{5}{2}} \; + \; \left[t^2-5t\right]_{\frac{5}{2}}^3 \\
&= \left(\frac{25}{2}-\frac{25}{4}\right) - (5-1) \; + \; (9-15) - \left(\frac{25}{4}-\frac{25}{2}\right) \\
&= \frac{25}{2}-10 \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

2. On a

$$\sqrt{E(t)} \; = \; \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t < 2, \\ \sqrt{2} & \text{si } 2 \leqslant t < 3, \\ \sqrt{3} & \text{si } 3 \leqslant t < \pi. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la **relation de Chasles**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sqrt{E(t)} \; dt &= \int_0^1 \sqrt{E(t)} \; dt \; + \; \int_1^2 \sqrt{E(t)} \; dt \; + \; \int_2^3 \sqrt{E(t)} \; + \; \int_3^\pi \sqrt{E(t)} \\
&= \int_0^1 0 \; dt \; + \; \int_1^2 1 \; dt \; + \; \int_2^3 \sqrt{2} \; + \; \int_3^\pi \sqrt{3} \\
&= 0 \cdot (1-0) \; + \; 1 \cdot (2-1) \; + \; \sqrt{2} \cdot (3-2) \; + \; \sqrt{3} \cdot (\pi - 3) \\
&= 1+\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}\pi.
\end{aligned}$$

3. Notons que

$$\min(2,t) \; = \; \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 2 & \text{si } 2 < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la **relation de Chasles**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \min(2,t) \; dt &= \int_0^2 \min(2,t) \; dt \; + \; \int_2^\pi \min(2,t) \; dt \\
&= \int_0^2 t \; dt \; + \; \int_2^\pi 2 \; dt.
\end{aligned}$$

Or une primitive de $f(t) = t$ est $\dfrac{t^2}{2}$. En effet $\left(\dfrac{t^2}{2}\right)' \; = \; t$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \min(2,t)\ dt &= \int_0^2 t\ dt\ +\ \int_2^{\pi} 2\ dt\\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2\ +\ 2\cdot(\pi-2)\\ &= \left(\frac{4}{2}-0\right)\ +\ 2\cdot(\pi-2)\\ &= 2\pi-2.\end{aligned}$$

4. Notons que

$$t|t|\ =\ \begin{cases} -t^2 & \text{si } -1\leqslant t\leqslant 0,\\ t^2 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 2.\end{cases}$$

Ainsi, d'après la **relation de Chasles**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} t|t|\ dt &= \int_{-1}^{0} t|t|\ dt\ +\ \int_0^2 t|t|\ dt\\ &= \int_{-1}^{0} -t^2\ dt\ +\ \int_0^2 t^2\ dt.\end{aligned}$$

Or, une primitive de $f(t)=t^2$ est $\dfrac{t^3}{3}$. En effet $\left(\dfrac{t^3}{3}\right)'\ =\ t^2$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} t|t|\ dt &= \int_{-1}^{0} -t^2\ dt\ +\ \int_0^2 t^2\ dt\\ &= \left[-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0}\ +\ \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2\\ &= -\left(0-\frac{-1}{3}\right)\ +\ \left(\frac{8}{3}-0\right)\ =\ \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 3

a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$

b) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1+x^2}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx$

e) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^2(x)dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln\left(x^2\right)}dx$

i) $\displaystyle\int (3x-1)\left(3x^2-2x+3\right)dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$

k) $\displaystyle\int (1-\cos(3x))dx$

l) $\displaystyle\int x\sin\left(x^2\right)dx$

m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

Solution

a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

b) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})$

e) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^2(x)dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3$

f) $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}dx = -\frac{1}{6(x^3-3x+1)^2}$

g) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}dx = \sqrt{x(x-2)}$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln\left(x^2\right)}dx = \frac{1}{2}\ln(\ln x^2)$

i) $\displaystyle\int (3x-1)\left(3x^2-2x+3\right)dx = \frac{1}{4}(3x^2-2x+3)^2$

j) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx = (\ln(x))^2$

k) $\displaystyle\int (1-\cos(3x))dx = x - \frac{1}{3}\sin(3x)$

l) $\displaystyle\int x\sin\left(x^2\right)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$

m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$

<u>Exercice 4</u> *(Intégration par parties)*
Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int e^x \cos x dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^n} dx$ avec $n > 1$ c) $\displaystyle\int x \arctan x dx$

d) $\displaystyle\int \left(x^2 + x + 1\right) e^x dx$ e) $\displaystyle\int e^{-x} \sin x dx$ f) $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx$

g) $\displaystyle\int \arctan x dx$ h) $\displaystyle\int x^3 \sin x dx$

<u>Solution</u>

1. $\displaystyle\int e^x \cos x dx$: Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & e^x & u'(x) & = & e^x \\ v(x) & = & \sin x & v'(x) & = & \cos x \end{array}$$

Ainsi

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, utilisons une fois de plus la méthode d' **intégrations par parties**. Cette fois-ci posons

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & e^x & u'(x) & = & e^x \\ v(x) & = & -\cos x & v'(x) & = & \sin x \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= -e^x \cdot \cos x - \int e^x(-\cos x) dx \\ &= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cos x \, dx \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \cdot \sin x - \left(-e^x \cdot \cos x + \int e^x \cos x \, dx\right) \\ &= e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure l'égalité

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x) \implies \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x).$$

2. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^n} dx \ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1$: Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**.
Pour cela, posons

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \ln x & u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) & = & \dfrac{1}{-n+1} \cdot x^{-n+1} & v'(x) & = & x^{-n} \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^n} dx &= \frac{\ln x}{(1-n)x^{n-1}} - \frac{1}{1-n} \int \frac{x^{-n+1}}{x} dx \\ &= \frac{\ln x}{(1-n)x^{n-1}} - \frac{1}{1-n} \int x^{-n} dx \\ &= \frac{\ln x}{(1-n)x^{n-1}} - \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \\ &= \frac{(1-n)\ln x - 1}{(1-n)^2 x^{n-1}} \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int x \arctan x \, dx$: Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \arctan x & u'(x) & = & \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x) & = & \dfrac{x^2}{2} & v'(x) & = & x \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int x \arctan x \, dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int 1 dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + \text{cte} \\ &= \frac{(x^2+1)\arctan x - x}{2} + \text{cte.} \end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int (x^2+x+1)e^x dx$: Nous avons

$$\int (x^2+x+1)e^x dx = \int x^2 e^x dx + \int x e^x dx + \int e^x dx.$$

D'abord

$$\int e^x dx = e^x$$

Maintenant, pour calculer les intégrales $\int xe^x dx$ et $\int x^2e^x dx$ utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. On commence avec $\int xe^x dx$. Posons

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x & u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & e^x & v'(x) & = & e^x \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \int xe^x dx & = & xe^x - \int e^x dx \\ & = & xe^x - e^x \end{array}$$

Finalement, pour calculer $\int x^2e^x dx$, posons

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x^2 & u'(x) & = & 2x \\ v(x) & = & e^x & v'(x) & = & e^x \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \int x^2e^x dx & = & x^2e^x - 2\int xe^x dx \\ & = & x^2e^x - 2xe^x + 2e^x \end{array}$$

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} \int (x^2+x+1)e^x dx & = & \int x^2e^x dx + \int xe^x dx + \int e^x dx \\ & = & x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + xe^x - e^x + e^x \\ & = & x^2e^x - xe^x + 2e^x \\ & = & \left(x^2 - x + 2\right) e^x \end{array}$$

5. $\int e^{-x} \sin x dx$

On a $\begin{array}{rcl} u(x) & = & \sin x \\ v(x) & = & -e^{-x} \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} u'(x) & = & \cos x \\ v'(x) & = & e^{-x} \end{array}$

$\int e^{-x} \sin x dx = -\sin x e^{-x} - \int -e^{-x} \cos x dx = -\sin x e^{-x} + \int e^{-x} \cos x dx$

On a $\begin{array}{rcl} u(x) & = & cosx \\ v(x) & = & -e^{-x} \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} u'(x) & = & -\sin x \\ v'(x) & = & e^{-x} \end{array}$

$\int e^{-x} \cos x dx = -\cos x e^{-x} - \int e^{-x} \sin x dx$

On a donc $\int e^{-x} \sin x dx = -\sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} - \int e^{-x} \sin x dx$

Donc $\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x)$

6. $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx$

On a $\begin{array}{lcl} u(x) & = & (\ln x)^2 \\ v(x) & = & x \end{array}$ et $\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \dfrac{2}{x}\ln x \\ v'(x) & = & 1 \end{array}$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 \; - \; \int 2\ln x dx = x(\ln x)^2 + 2x(\ln x - 1)$$

7. $\displaystyle\int \arctan x dx$

On a $\begin{array}{lcl} u(x) & = & \arctan x \\ v(x) & = & x \end{array}$ et $\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{1+x^2} \\ v'(x) & = & 1 \end{array}$

$$\int \arctan x dx = x\arctan x \; - \; \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

8. $\displaystyle\int x^3 \sin x dx$

On a $\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^3 \\ v(x) & = & -\cos x \end{array}$ et $\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 3x^2 \\ v'(x) & = & \sin x \end{array}$

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3\cos x \; - \; 3\int -x^2\cos x dx$$

On a $\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^2 \\ v(x) & = & \sin x \end{array}$ et $\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2x \\ v'(x) & = & \cos x \end{array}$

$$\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x dx$$

On a $\begin{array}{lcl} u(x) & = & x \\ v(x) & = & -\cos x \end{array}$ et $\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \sin x \end{array}$

$$\int x\sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x$$

Donc

$$\int x^3\sin x dx = -x^3\cos x + 3\left(x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x)\right)$$
$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x$$

Exercice 5

Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x})$ b) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2 dx$

c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3} dx.$ d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx$

e) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x} dx.$ f) $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

g) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{(\cos x)^2} dx$ h) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Solution

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx, \quad (t=\sqrt[6]{2+x})$:

Comme indiqué, posons

$$t \;=\; \sqrt[6]{2+x} \quad\Longrightarrow\quad x \;=\; t^6-2 \quad\Longrightarrow\quad dx \;=\; 6t^5dt.$$

De plus $\sqrt{2+x} \;=\; \left(\sqrt[6]{2+x}\right)^3 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{2+x}=t^3.$

De même $\sqrt[3]{2+x} \;=\; \left(\sqrt[6]{2+x}\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt[3]{2+x}=t^2.$

Ainsi $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx \;=\; \int \frac{6t^5}{t^2+t^3}dt \;=\; 6\int \frac{t^3}{1+t}dt.$

D'où

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx &= 6\int \frac{t^3}{1+t}dt \\
&= 6\int \frac{t^3+1-1}{1+t}dt \\
&= 6\int \frac{t^3+1}{1+t}-\frac{1}{1+t}dt \\
&= 6\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{1+t}dt-6\int\frac{1}{1+t}dt \\
&= 6\int (t^2-t+1)dt-6\int\frac{1}{1+t}dt \\
&= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-6\ln(|1+t|) \;+\; \text{cte} \\
&= 2t^3-3t^2+6t-6\ln(|1+t|) \;+\; \text{cte} \\
&= 2\sqrt{2+x}-3\sqrt[3]{2+x}+6\sqrt[6]{2+x}-6\ln\left(\left|1+\sqrt[6]{2+x}\right|\right) \;+\; \text{cte}
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int (\arcsin x)^2dx$: Utilisons la méthode d' **intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{aligned}
u(x) &= (\arcsin x)^2 & u'(x) &= \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\
v(x) &= x & v'(x) &= 1
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int (\arcsin x)^2dx \;=\; x(\arcsin x)^2 \;-\; 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, utilisons une fois de plus la méthode d' **intégrations par parties**. Cette fois-ci posons

$$\begin{aligned}
u(x) &= \arcsin x & u'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
v(x) &= -\sqrt{1-x^2} & v'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\arcsin x\sqrt{1-x^2} \;-\; \int -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= -\arcsin x\sqrt{1-x^2} \;+\; \int 1\ dx \\ &= -\arcsin x\sqrt{1-x^2} \;+\; x \;+\; \text{cte.}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 \;-\; 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x(\arcsin x)^2 \;-\; 2\left(-\arcsin x\sqrt{1-x^2} \;+\; x \;+\; \text{cte}\right) \\ &= x(\arcsin x)^2 \;+\; 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} \;-\; 2x \;+\; \text{cte.}\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$: À l'aide du changement de variable

$$1+x^3=u \quad\Longrightarrow\quad 3x^2dx \;=\; du \quad\Longrightarrow\quad x^2dx \;=\; \frac{du}{3}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x^3}dx &= \int \frac{1}{3}\sqrt{u}\ du \\ &= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\ du \\ &= \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \;+\; \text{cte} \\ &= \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} \;+\; \text{cte} \\ &= \frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}} \;+\; \text{cte.}\end{aligned}$$

4. On effectue un changement de variables : $u=\sqrt{e^x-1}$ il vient $u^2=e^x-1$ et $e^x=u^2+1$ d où $2udu=e^xdx$

$$\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{2udu}{(3+u^2+1)\,u} = \int \frac{2du}{4+u^2} = 2\arctan\frac{u}{2} = \arctan\left(\sqrt{\frac{e^x-1}{2}}\right)$$

5. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}dx$ on pose $w=\sqrt{x}$ donc $w^2=x$ donc $2wdw=dx$

$$\int \cos\sqrt{x}dx = 2\int w\cos w dw$$

On effectue une intégration par partie :

On a $\begin{array}{rcl} u(w) &=& w \\ v(w) &=& \sin w\end{array}$ et $\begin{array}{rcl} u'(w) &=& 1 \\ v'(w) &=& \cos w\end{array}$

$$\int w\cos w dw = w\sin w - \int \sin w dw = w\sin w + \cos w$$

On a donc $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}$

6. $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + 2e^{\sqrt{x}}$

7. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{(\cos x)^2}dx = \int e^{\tan(x)}\tan'(x)dx = e^{\tan(x)}$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

On a $\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^2 \\ v(x) & = & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ et $\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2x \\ v'(x) & = & \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = x^2\sqrt{1+x^2} - 2\int x\sqrt{1+x^2}dx = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ b) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\,dt$ c) $\displaystyle\int_0^\pi t^2\sin t\,dt$

d) $\displaystyle\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos\sqrt{1-t}\,dt$ e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t-1}{1+t^2}dt$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\sin t}$

g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ h) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{1+e^t}$ i) $\displaystyle\int_0^1 t(\arctan t)^2dt$

Solution

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$: À l'aide du changnement de variable :

$$1-t^2 = u \implies -2tdt = du,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \int_1^0 \frac{-1}{2\sqrt{u}}\,du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du \\ &= \left[\sqrt{u}\right]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\,dt$: Nous avons

$$\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\,dt = \int_0^a a\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}\,dt = a\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}\,dt.$$

Ainsi, à l'aide du changement de variable :

$$\frac{t}{a} = u \implies \frac{dt}{a} = du,$$

nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\;dt &= a\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}\;dt\\ &= a^2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\;du.\end{aligned}$$

Maintenant, en effectuant le changement de variable

$$u = \sin x \quad\Longrightarrow\quad du = \cos x\;dx$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\;du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\;\cos x\;dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\;dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)+1}{2}\;dx\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\;dt &= a^2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\;du\\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)+1}{2}\;dx\\ &= a^2\left[\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{a^2\pi}{2}.\end{aligned}$$

c) $\int_0^\pi t^2\sin t\;dt$: Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) &=& t^2 & & u'(t)u &=& 2t\\ v(t) &=& -\cos t & & v'(t) &=& \sin t\end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\sin t\;dt &= \left[-t^2\cdot\cos t\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi t\cos t\;dt\\ &= \pi^2 + 2\int_0^\pi t\cos t\;dt.\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, utilisons une fois de plus la méthode d' **intégrations par parties**. Cette fois-ci posons

$$\begin{array}{rcl} u &=& t\\ dv &=& \cos t\;dt\end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rcl} du &=& dt\\ v &=& \sin t\end{array}$$

D'où

$$\int_0^{\pi} t\cos t \ dt \ = \ [t\cdot\sin t]_0^{\pi} \ - \ \int_0^{\pi} \sin t \ dt \ = \ [\cos t]_0^{\pi} \ = \ -2.$$

Par conséquent

$$\int_0^{\pi} t^2\sin t \ dt \ = \ \pi^2 \ + \ 2\int_0^{\pi} t\cos t \ dt \ = \ \pi^2 - 4.$$

d) $\displaystyle\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^{1} \cos\sqrt{1-t} \ dt$: En effectuant le changement de variable

$$x \ = \ \sqrt{1-t} \quad \Longrightarrow \quad t \ = \ 1-x^2 \quad \Longrightarrow \quad dt \ = \ -2xdx$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^{1} \cos\sqrt{1-t} \ dt \quad &= \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\cdot(-2x) \ dx \\
&= \quad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \ dx \\
&\underbrace{=}_{\text{IPP = voir point précédent}} \quad 2\,[x\cdot\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \ - \ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ dx \\
&= \quad \pi \ + \ 2\,[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \quad \pi \ - \ 2.
\end{aligned}$$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t-1}{1+t^2}dt = \int_{-1}^{1}\frac{t}{1+t^2}dt - \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt = -2\arctan 1 = -\frac{\pi}{2}$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_0^1 \frac{2dx}{(1+x^2)\left(2+\frac{2x}{1+x^2}\right)} = \int_0^1\frac{2dx}{2x^2+2x+2} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right.\right.$

$\displaystyle = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^4 - 3 = 4-2-3 = -1$

h) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^4\frac{e^{-t}dt}{1+e^{-t}} = \left[-\ln\left(1+e^{-t}\right)\right]_1^4 = \ln(1+e^{-1})\text{-}\ln\left(1+e^{-4}\right)$

i) On a

$\displaystyle\int t(\arctan t)^2dx = \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 \ - \ \int\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\arctan t \ dt =$

$\displaystyle = \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - \int \arctan t \ dt + \int\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\arctan t \ dt$

$\displaystyle = \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - \int\arctan t \ dt + \ \frac{1}{2}(\arctan t)^2$

On a $\begin{array}{rcl} u(t) & = & \arctan t \\ v(t) & = & t \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} u'(t) & = & \dfrac{1}{1+t^2} \\ v'(t) & = & 1 \end{array}$

$$= \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - \ t\arctan t + \int \frac{t}{1+t^2}\ dt + \ \frac{1}{2}(\arctan t)^2$$
$$= \frac{t^2}{2}(\arctan t)^2 - \ t\arctan t + \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + \ \frac{1}{2}(\arctan t)^2$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 t(\arctan t)^2 dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

Exercice 7

Considérons l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

Solution

Solution : Comme indiqué, on fait le changement de variable

$$u \ = \ \sqrt{e^x - 1} \quad \Longrightarrow \quad u^2 = e^x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \ln\left(u^2+1\right).$$

D'où $dx \ = \ \dfrac{2u}{u^2+1}du$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx &= \int_0^1 u \cdot \frac{2u}{u^2+1}du \\ &= 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}du \\ &= 2\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du \\ &= 2\int_0^1 \frac{u^2+1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1}du. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx &= 2\int_0^1 \frac{u^2+1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1}du \\ &= 2\int_0^1 1\ du - 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du \\ &= 2\big[u\big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du \ = \ 2 - 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du. \end{aligned}$$

On connait une primitive de $\dfrac{1}{u^2+1}$

En effet $(\arctan(u))' = \dfrac{1}{1+u^2}$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx &= 2 - 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1} du \\ &= 2 - 2\big[\arctan(u)\big]_0^1 \\ &= 2 - 2\arctan(1) + 2\arctan(0) \ = \ 2 - \frac{2\pi}{4} + 2\cdot 0 \ = 2 - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 8

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$
   En déduire le valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx$
2. Montrer que
   $$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx = \frac{\pi}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$$
   pour $a > 1$, (Indication : utiliser la formule $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, pour $x > 0$).

Solution

On effectue le changement de variables : $u = a+b-x$ d'où $du = -dx$

$\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_b^a f(u)(-du) = -\int_b^a f(u)du = \int_a^b f(u)du$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x + \sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0 - x\right)\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx$

$\displaystyle= \frac{\pi\ln 2}{8}$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx$ on effectue le changement de variable : $u = \dfrac{1}{x}$ donc $du = -\dfrac{dx}{x^2}$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx = \int_a^{\frac{1}{a}} (1+u^2)\left(\arctan\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_a^{\frac{1}{a}} (1+u^2)\left(\arctan\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{du}{u^2}\right)$

$\displaystyle= \int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan u\right)du$

Il vient $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(1+\frac{1}{u^2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\left(a-\frac{1}{a}\right)+\left(-\frac{1}{a}+a\right)\right) = \frac{\pi}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$

Exercice 9

Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

a) $\dfrac{x^3}{x^2-4}$. b) $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$. c) $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.

d) $\dfrac{1}{t^3+1}$. e) $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$. f) $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.

g) $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)}$ h) $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Solution

1. On commence par donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{x^3}{x^2-4}$, nous avons

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx &= \int x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}+2\ln(|x-2|)+2\ln(|x+2|)+\text{cte}\\ &= \frac{x^2}{2}+\ln\left((x^2-4)^2\right)+\text{cte}.\end{aligned}$$

2. On commence par donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$, nous avons

$$\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}.$$

Par conséquent

$$\int \frac{4x}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{4}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}\,dx = 4\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+\text{cte}.$$

3. Notons que $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$ est un élément simple. Calculons sa primitive. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int \frac{3t+1}{t^2-2t+10}\,dt &= \int \frac{3t}{t^2-2t+10}\,dt + \int \frac{1}{t^2-2t+10}\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2t-2+2}{t^2-2t+10}\,dt + \int \frac{1}{(t^2-2t+1)+9}\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+10}\,dt + \int \frac{4}{(t^2-2t+1)+9}\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+10}\,dt + 4\int \frac{1}{(t-1)^2+9}\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+10}\,dt + \frac{4}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{3}\right)^2+1}\,dt \\
&= \frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10) + \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right) + \text{cte.}
\end{aligned}$$

4. On commence par donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{t^3+1}$, nous avons

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t^3+1}\,dx &= \int \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cte.}
\end{aligned}$$

5. $R(x) = \dfrac{x^3+2}{(x+1)^2} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

La division euclidienne donne : $x^3+2 = (x-2)\left(x^2+2x+1\right) + (3x+4)$

Le coefficient de $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ est 1 (on remplace x par -1 dans le numérateur).

On calcule $\dfrac{3x+4}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{x+1}$

Donc $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2} = x-2+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Donc une primitive est $\dfrac{x^2}{2} - 2x + 3\ln(x+1) - \dfrac{1}{x+1}$

6. Primitive de $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$

Le coefficient de $\dfrac{1}{x}$ est $\dfrac{1}{4}$ (on remplace x par -1 dans $\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$).

Le coefficient de $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ est $\dfrac{3}{2}$ (on remplace x par -1 dans $\dfrac{x+1}{x}$).

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{4x}-\frac{3}{2(x-2)^2}=\frac{4x+4-x^2+4x-4-6x}{4x(x-2)^2}=\frac{-x+2}{4(x-2)^2}=-\frac{1}{4(x-2)}$$

Donc $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}=\dfrac{1}{4x}+\dfrac{3}{2(x-2)^2}-\dfrac{1}{4(x-2)}$

Une primitive est $\dfrac{1}{4}\ln x-\dfrac{3}{2(x-2)}-\dfrac{1}{4}\ln(x-2)$

7. $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}$ Le coefficient de $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ est $-\dfrac{1}{2}$ (on remplace x par -1 dans $\dfrac{x^2-2x}{\left(x^2+1\right)}$).

   Le coefficient de $\dfrac{1}{x-i}$ est $\dfrac{-1-2i}{(i-1)^2 2i}=-\dfrac{1+2i}{4}$ (on remplace x par i dans $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2(x+i)}$).

   Donc $-\dfrac{1+2i}{4(x-i)}-\dfrac{1-2i}{4(x+i)}=-\dfrac{(1+2i)(x+i)+(1-2i)(x-i)}{x^2+1}=-\dfrac{x-2}{2\left(x^2+1\right)}$

   Enfin
$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{x-2}{2\left(x^2+1\right)}$$
$$=\frac{2x^2-4x+x^2+1+(x-2)\left(x^2-2x+1\right)}{2(x-1)^2\left(x^2+1\right)}$$
$$=\frac{2x^2-4x+x^2+1+x^3-4x^2+5x-2}{2(x-1)^2\left(x^2+1\right)}$$
$$=\frac{x^3-x^2+x-1}{2(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(x^2+1\right)x-\left(x^2+1\right)}{2(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(x^2+1\right)(x-1)}{2(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{4(x-1)}$$

   Donc
$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{x-2}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{4(x-1)}$$
$$=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{4(x-1)}$$

   Une primitive est $\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+\dfrac{1}{4}\ \ln(x-1)$

Exercice 10

Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1(1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

Solution

1. Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & (1-t^2)^{n+1} & \qquad & u'(t) & = & -2(n+1)t(1-t^2)^n \\ v(t) & = & t & & v'(t) & = & 1 \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}dt &= \left[t(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1 \;+\; 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt\\ &= 0 \;+\; 2(n+1)\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^n dt\\ &= 2(n+1)\int_0^1 -(1-t^2)^{n+1} \;+\; (1-t^2)^n dt.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}dt &= 2(n+1)\int_0^1 -(1-t^2)^{n+1} \;+\; (1-t^2)^n dt\\ &= -2(n+1)\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\, dt \;+\; 2(n+1)\int_0^1 (1-t^2)^n dt\\ &= -2(n+1)I_{n+1} \;+\; 2(n+1)I_n.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$I_{n+1} \;=\; -2(n+1)I_{n+1} \;+\; 2(n+1)I_n \quad\Longrightarrow\quad I_{n+1} \;=\; \frac{2n+2}{2n+3}I_n.$$

2. Calculer I_n : À l'aide de l'identité précédente, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}I_n \;=\; \frac{2(n-1)+2}{2(n-1)+3}I_{n-1} &= \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}\\ &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2}\\ &\vdots\\ &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_0\end{aligned}$$

Finalement

$$I_0 \;=\; \int_0^1 (1-t^2)^0 dt \;=\; \int_0^1 1dt \;=\; (1-0)\cdot 1 \;=\; 1.$$

Par conséquent

$$I_n \;=\; \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$: D'après le binome de Newton, nous pouvons écrire

$$(1-t^2)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^{2k}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t^2)^n dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{2k+1}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{2k+1} &= \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= I_n \\ &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot \ \cdots \ \cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 11 *Intégrales de Wallis*

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Solution

1. Utilisons la méthode d'**intégrations par parties**. Pour cela, posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) &=& \sin^{n+1} t & \quad & u'(t) &=& (n+1)\sin^n t \cos t \ dt \\ v(t) &=& -\cos t & & v'(t) &=& \sin t \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt &= \left[-\sin^{n+1} t\cdot\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \ + \ (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^2 t \ dt \\ &= 0 \ + \ (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\left(1-\sin^2 t\right) \ dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ dt \ - \ (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \ dt.\end{aligned}$$

D'où

$$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \quad\Longrightarrow\quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n.$$

2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} : En utilisant l'égalité $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \cdot I_{2p-2} \\ &= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot I_{2p-4} \\ &\vdots \\ &= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \cdot I_{2p-1} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdot I_{2p-3} \\ &\vdots \\ &= \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1. \end{aligned}$$

Or

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p-1) \cdot (2p-3) \cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 1}{2p \cdot (2p-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} &= \frac{2p \cdot (2p-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 4 \cdot 2}{(2p+1) \cdot (2p-1) \cdot \ \cdots \ \cdot 5 \cdot 3} \cdot 1. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} 2p \cdot (2p-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 4 \cdot 2 &= 2^p \cdot p \cdot (p-1) \cdot \ \cdots \ \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2^p \cdot p! \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (2p-1) \cdot (2p-3) \cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 1 &= \frac{(2p)!}{2p \cdot (2p-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 4 \cdot 2} \\ &= \frac{(2p)!}{2^p \cdot p!}. \end{aligned}$$

Donc

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive : Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sin x \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \sin^n x \geq 0 \\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \quad &\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \sin^n x \geq \sin^{n+1} x \\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\ dx > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq I_{n+1} > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}
\end{aligned}$$

4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$: D'après la question précédente, nous avons

$$0 < I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

Or $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1 \quad &\Longrightarrow \quad 1 \ = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} \ \leq \ \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \ \leq \ 1 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \ = \ 1 \\
&\Longrightarrow \quad I_n \sim I_{n+1}.
\end{aligned}$$

5. Calculer nI_nI_{n+1} : D'après la question 2, nous avons

$$I_{2p} \ = \ \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} \ = \ \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Donc

$$(2p-1) \cdot I_{2p-1} \cdot I_{2p} \ = \ \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad 2p \cdot I_{2p} \cdot I_{2p+1} \ = \ \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

C'est-à-dire

$$nI_n \cdot I_{n+1} \ = \ \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

6. Donner alors un équivalent simple de I_n : D'après la question précédente, nous avons

$$nI_n \cdot I_{n+1} \ = \ \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad I_n \cdot I_{n+1} \ = \ \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

De plus

$$\begin{aligned} I_n \sim I_{n+1} \implies I_n^2 \sim I_n \cdot I_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \\ \implies I_n^2 &\sim \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \\ \implies I_n &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \\ \implies I_n &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

Exercice 12

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Solution

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$: Pour tout $x \geq 0$, on a

$$1 \leqslant x+1 \implies \frac{1}{1+x} \leqslant 1 \implies \forall n\in\mathbb{N},\ \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx &\leqslant \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n \leqslant \frac{1}{n+1} \implies \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$: Nous avons :

$$\begin{aligned}
I_n \; + \; I_{n+1} \; = \; \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \; + \; \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \; &= \; \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \; + \; \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,dx \\
&= \int_0^1 x^n \cdot \frac{1+x}{1+x} dx \\
&= \int_0^1 x^n dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$: Par la question précédente, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad &= \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \\
&= \quad (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots \pm (I_{n-1} + I_n) \\
&\underbrace{=}_{\text{somme télescopique}} \quad I_0 + (I_1 - I_1) + (I_2 - I_2) + \cdots + (I_{n-1} - I_{n-1}) \pm I_n \\
&= \quad I_0 \; \pm \; I_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad &= \quad \lim_{n\to+\infty} I_0 \; \pm \; I_n \\
&= \quad I_0 \; \pm \; \lim_{n\to+\infty} I_n \\
&= \quad I_0 \; + \; 0 \\
&= \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \\
&= \quad [\ln(x+1)]_0^1 \\
&= \quad \ln 2.
\end{aligned}$$

Exercice 13 *Séries de Riemann*

Calculer :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Solution

1. On a $\ln \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$
   On reconnaît une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ donc la somme tend vers $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$
   On effectue une intégration par partie :
   On a $\begin{array}{rcl} u(x) & = & \ln\left(1+x^2\right) \\ v(x) & = & x \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} u'(t) & = & \frac{2x}{1+x^2} \\ v'(t) & = & 1 \end{array}$
   $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx = \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\left(\int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right)$
   $= \ln 2 - 2(1+\arctan 1) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$
   Donc par composition $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}$
2. On a $n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2}$
   On reconnaît une somme de Riemann qui tend donc vers
   $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_0^1 = e^{-1}$
3. On a
   $\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$
   On reconnaît une somme de Riemann qui tend donc vers
   $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 + [\arctan x]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$
4. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$ On reconnaît une somme de Riemann qui tend donc vers $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Exercice 14

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2}$.

Solution

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$: On commence par noter que :

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\\ && = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{0+k\frac{(1-0)}{n}}.\end{aligned}$$

En posant $f(x)=\sqrt{x}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Maintenant, la somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$ converge vers $\int_0^1 f(x)dx$, ainsi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+p^2}$: On commence par noter que :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{n}{n^2+p^2} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{p}{n}\right)^2} = \frac{(1-0)}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1+\left(0+p\frac{(1-0)}{n}\right)^2}.$$

En posant $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Maintenant, la somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{p}{n}\right)^2}$ converge vers $\int_0^1 f(x)dx$, ainsi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{n}{n^2+p^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 15
Sans calculer les intégrales, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \; dx.$$

Solution
À l'aide du changement de variable

$$x = \frac{\pi}{2} - u \quad \Longrightarrow \quad dx = -du,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx &= \int_{\pi/2}^{0} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \; (-du) \\
&= -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \; du \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \; du
\end{aligned}$$

Maintenant

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \; = \; \cos u.$$

Donc

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx \; = \; \int_0^{\pi/2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \; du \; = \; \int_0^{\pi/2} \cos^n u \; du \; = \; \int_0^{\pi/2} \cos^n x \; dx.$$

Exercice 16
Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. On suppose f T-périodique. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.
3. Ecrire $g(x)$ sous la forme $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{nT} f(t)dt + \dfrac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)dt$ pour un entier n bien choisi, et en déduire que g admet une limite en $+\infty$.

Exercice 17
Soit $f \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Solution

1. F est continue sur $\mathbb{R}$. Vrai : F est continue sur $\mathbb{R}$ car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f. Pour plus de détails voir cours.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f. Vrai : Voir cours.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$. Faux : En effet, posons $f(x) = x$. Alors

$$F(x) \;=\; \int_0^x t\ dt \;=\; \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \;=\; \frac{x^2}{2} - 0 \;=\; \frac{x^2}{2}.$$

qui est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$. Faux : En effet, posons $f(x) = x^2$. Alors

$$F(x) \;=\; \int_0^x t^2 dt \;=\; \frac{x^3}{3}.$$

qui est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$.

5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$. Vrai : En effet, soit $x < y$, alors

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_0^y f(t)dt \;-\; \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^x f(t)dt \;+\; \int_x^y f(t)dt \;-\; \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_x^y f(t)dt. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \forall t \in [x, y], \quad f(t) \geq 0 &\implies \int_x^y f(t)dt \geq 0 \\ &\implies F(y) - F(x) \geq 0 \\ &\implies F \ \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

Deuxième méthode : Nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) \;=\; f(x) \;\geq\; 0.$$

Donc F est croissante.

6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$. Faux : En effet, posons $f(x) = 1 + \cos(x)$. Alors

$$F(x) \;=\; \int_0^x 1 + \cos(t)\ dt \;= [t + \sin(t)]_0^x \;=\; x + \sin(x) - (0 + \sin(0)) \;=\; x + \sin(x).$$

qui n'est pas périodique.

7. Si f est paire alors F est impaire. Vrai : En effet, nous avons

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt.$$

En faisant le changement de variable

$$t = -u \quad \Longrightarrow \quad dt = -du$$

nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} F(-x) \quad &= \quad \int_0^{-x} f(t)dt \\ &= \quad \int_0^{x} f(-u)(-du) \\ &\underbrace{=}_{f \text{ est paire}} \quad -\int_0^{x} f(u)du \\ &= \quad -F(x). \end{aligned}$$

De plus $F(0) = 0$. F est donc impaire.

Exercice 18

Déterminer les fonctions f continues sur $[a, b]$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{[a,b]} |f|$.

Solution

Tout d'abord, notons que

$$b - a \;=\; \int_a^b 1\ dt.$$

La linearité de l'intégrale, nous permet donc d'ecrire

$$\begin{aligned} (b-a)\sup_{[a,b]} |f| \;&=\; \sup_{[a,b]} |f| \int_a^b 1\ dt \\ &=\; \int_a^b \sup_{[a,b]} |f|\ dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt \;=\; (b-a)\sup_{[a,b]}|f| &\iff \int_a^b \sup_{[a,b]}|f| \;=\; \int_a^b f(t)dt \\ &\iff \int_a^b \sup_{[a,b]}|f| - \int_a^b f(t)dt \;=\; 0 \\ &\iff \int_a^b \sup_{[a,b]}|f| - f(t)dt \;=\; 0.\end{aligned}$$

Or

$$\forall t\in[a,b],\quad \sup_{[a,b]}|f| \geq f(t).$$

La fonction

$$t \;\longmapsto\; \sup_{[a,b]}|f| \;-\; f(t),$$

est donc continue et positive sur $[a,b]$, d'intégale nulle sur $[a,b]$. Par conséquent

$$\forall t\in[a,b],\quad \sup_{[a,b]}|f| - f(t) \;=\; 0.$$

D'où on conclut

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt \;=\; (b-a)\sup_{[a,b]}|f| &\iff \forall t\in[a,b],\quad f(t)=\sup_{[a,b]}|f| \\ &\iff f \;\text{ est constante.}\end{aligned}$$

Exercice 19

Soit $f\in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. On suppose f T-périodique. Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt$.
3. Ecrire $g(x)$ sous la forme $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{nT} f(t)dt+\dfrac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)dt$ pour un entier n bien choisi, et en déduire que g admet une limite en $+\infty$.

Solution

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0 : On doit montrer que la limite

$$\lim_{x\to 0}\; g(x) \;=\; \lim_{x\to 0}\; \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

existe. Posons

$$F(x) \;=\; \int_0^x f(t)dt \quad\Longrightarrow\quad F(0) \;=\; \int_0^0 f(t)dt \;=\; 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} \;&=\; \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \\ &=\; F'(0) \;=\; f(0).\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut prolonger g en posant

$$g(0) \;=\; f(0).$$

2. On suppose f T-périodique. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

À l'aide du changement de variable

$$t = u + kT \quad\Longrightarrow\quad dt \;=\; du.$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt \;&=\; \int_0^T f(u+kT)du \\ &\underbrace{=}_{f \text{ est } T-\text{périodique}} \int_0^T f(u)du \\ &=\; \int_0^T f(t)dt.\end{aligned}$$

3. Ecrire $g(x)$ sous la forme $\frac{1}{x}\int_0^{nT} f(t)dt + \frac{1}{x}\int_{nT}^{x} f(t)dt$ pour un entier n bien choisi, et en déduire que g admet une limite en $+\infty$.

L'idée, c'est de choisir n de sorte d'avoir

$$nT \;\leq\; x \;<\; nT+T.$$

Pour cela, posons

$$n \;=\; E\left(\frac{x}{T}\right).$$

Alors

$$n \;\leq\; \frac{x}{T} \;<\; n+1 \quad\Longrightarrow\quad nT \;\leq\; x \;<\; nT+T.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} g(x) \;=\; \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \;&=\; \frac{1}{x}\left(\int_0^{nT} f(t)dt \;+\; \int_{nT}^x f(t)dt\right) \\ &=\; \frac{1}{x}\int_0^{nT} f(t)dt \;+\; \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{nT} f(t)dt \;+\; \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)dt.$$

Étudions donc les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{nT} f(t)dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)dt.$$

On commence par noter que

$$\begin{aligned} \left|\int_{nT}^x f(t)dt\right| \;\leq\; \int_{nT}^x |f(t)|dt \quad &\underbrace{\leq}_{\text{car } \;|f|\geq 0} \quad \int_{nT}^{nT+T} |f(t)|dt \\ &\underbrace{=}_{\text{d'après le point 2.}} \quad \int_0^T |f(t)|dt \;=\; \text{cte.} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left|\int_{nT}^x f(t)dt\right| \;\leq\; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^T |f(t)|dt \;=\; 0.$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)dt \;=\; 0.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_0^{nT} f(t)dt \quad &= \quad \int_0^T f(t)dt \;+\; \int_T^{2T} f(t)dt \;+\; \cdots \;+\; \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)dt \\ &\underbrace{=}_{\text{d'après le point 2.}} \int_0^T f(t)dt \;+\; \int_0^T f(t)dt \;+\; \cdots \;+\; \int_0^T f(t)dt \\ &= \quad n\int_0^T f(t)dt. \end{aligned}$$

Maintenant, $n = E\left(\dfrac{x}{T}\right)$, donc

$$\frac{x}{T} - 1 \;\leq\; n \;\leq\; \frac{x}{T}.$$

D'où

$$\frac{x-T}{T}\int_0^T f(t)dt \ \leq \ (\text{ou } \ \geq) \ \ n\int_0^T f(t)dt \ \leq \ (\text{ou } \ \geq) \ \ \frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Ainsi

$$\frac{x-T}{x\cdot T}\int_0^T f(t)dt \ \leq \ (\text{ou } \ \geq) \ \ \frac{n}{x}\int_0^T f(t)dt \ \leq \ (\text{ou } \ \geq) \ \ \frac{x}{x\cdot T}\int_0^T f(t)dt.$$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-T}{x\cdot T}=\dfrac{1}{T}$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{x}\int_0^T f(t)dt \ = \ \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} g(x) \ &= \ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{nT} f(t)dt \ + \ \frac{1}{x}\int_{nT}^{x} f(t)dt \\
&= \ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{nT} f(t)dt \ + \ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{nT}^{x} f(t)dt \\
&= \ \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \ + \ 0 \\
&= \ \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.
\end{aligned}$$

Exercice 20

Si$(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on définit

$$I(n,p)=\int_0^1 t^n(1-t)^p \ \mathrm{d}t$$

1. Si $p\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, exprimer $I(n,p)$ en fonction de $I(n+1,p-1)$.
2. Calculer $I(n,p)$ pour $n,p\in\mathbb{N}$.

Solution

1. On utilise une intégration par parties avec $u : t\mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v : t\mapsto (1-t)^p$ qui sont de classe C^1 sur $[0,1]$.

$$I(n,p)=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^p\right]_0^1+\frac{p}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{p-1} \ \mathrm{d}t$$

donc $I(n,p)=\dfrac{p}{n+1}I(n+1,p-1)$.

2. On note pour $n\in\mathbb{N}, H_n : \forall p\in\mathbb{N}, I(n,p)=\dfrac{p!n!}{(n+p+1)!}$ et on raisonne par récurrence.

— Initialisation
$I(0,p) = \int_0^1 (1-t)^p \ \mathrm{d}t$
$I(0,p) = \left[\frac{-(1-t)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$
$I(0,p) = \frac{0!p!}{(p+1)!}$
Donc H_0 est vraie.

— Hérédité
On suppose que H_n est vraie.
On utilise la formule de la question 1 en replaçant p par $p+1$.
$I(n,p+1) = \frac{p+1}{n+1} I(n+1,p)$
$I(n+1,p) = \frac{n+1}{p+1}$
$I(n,p+1)$ puis avec H_n : $I(n+1,p) = \frac{n+1}{p+1} \frac{(p+1)!n!}{(n+p+1+1)!}$
$I(n+1,p) = \frac{p!(n+1)!}{(n+p+2)!}$ ce qui prouve H_{n+1}.

— La propriété a été démontrée par récurrence.
En particulier, $I(n,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 21
Si $a < b$ et $n, p \in \mathbb{N}$, calculer

$$J(n,p) = \int_a^b (t-a)^n (b-t)^p \ \mathrm{d}t$$

Solution

— Recherche : On cherche un changement de variable de la forme$t = \alpha u + \beta$ tel que $t = a \Leftrightarrow u = 0$ et $t = b \Leftrightarrow u = b$. On résout donc le système

$$\begin{cases} \beta = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases} \text{ ssi } \beta = a, \alpha = b - a$$

On obtient

$$t = (b-a)u + a$$

— Rédaction

$$\varphi : [0,1] \to [a,b], u \mapsto (b-a)u + a$$

φ est de classe C^1 et

$$J(n,p) = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t) \mathrm{d}t$$

donne par le théorème de changement de variable :

$$J(n,p) = \int_0^1 f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$
$$t-a = (b-a)u \text{ et } b-t = (b-a)(1-u)$$
$$J(n,p) = \int_0^1 (b-a)^n u^n (b-a)^p (1-u)^p (b-a)\mathrm{d}u$$
$$J(n,p) = (b-a)^{n+p+1} I(n,p)$$

$$J(n,p) = (b-a)^{n+p+1} \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$$

Exercice 22
Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Calculer

$$K(n,p) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) \sin^{2p+1}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Solution
La fonction $\varphi :] \ 0, \pi/2] \to [0,1], \theta \mapsto \cos^2(\theta)$ est une bijection de classe C^1. Par le théorème de changement de variable $I(n,p) = \displaystyle\int_{\varphi(\pi/2)}^{\varphi(0)} f(t)\mathrm{d}t$
$I(n,p) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{0} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)\mathrm{d}\theta$ $f(\varphi(\theta)) = \cos^{2n}(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)^p$
$f(\varphi(\theta)) = \cos^{2n}(\theta)\sin^2 p(\theta)$
$\varphi'(\theta) = -2\sin(\theta)\cos(\theta)$.
$f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) = -2\cos^{2n+1}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta)$
$I(n,p) = -2\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \cos^{2n+1}(\theta)\sin^{2p+1} \ \mathrm{d}\theta$
$I(n,p) = 2K(n,p)$ donc $K(n,p) = \dfrac{p!n!}{2(n+p+1)!}$.

Exercice 23
Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u$
Solution
: $K(n,n) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta)\sin^{2n+1}$ $K(n,n) = \dfrac{1}{2^{2n+1}}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(2\theta)\mathrm{d}\theta$ en utilisant le changement de variable $u = 2\theta, 2^{2n+1}K(n,n) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)1/2 \ \mathrm{d}u$ $2^{2n+2}K(n,n) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u$ Puis par le changement de variable $v = \pi - u$: $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = \displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \sin^{2n+1}(\pi - v)(-1)\mathrm{d}v$ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(v)\mathrm{d}v$ et par la relation de

Chasles : $2^{2n+2}K(n,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u$ donc $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = 2^{2n+1}K(n,n)$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 24

Si$(p,n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.

Solution

Si $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, $I(n,p) = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^p \mathrm{~d}t$ $I(n,p) = \dfrac{p!n!}{(n+p+1)!}$ Par le binôme de Newton :

$$t^n(1-t)^p = t^n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k t^k$$

$$t^n(1-t)^p = \sum_{k=0}^{p^{k=0}} \binom{p}{k} (-1)^k t^{k+n}$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$I(n,p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left[\frac{(-1)^k t^{n+k+1}}{n+k+1}\right]_0^1.$$

$$\text{soit } \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$$
