Cycle Pré-ingenieur
Première Année
Agèbre II - 2023/2024

TD3 : Espaces vectoriels

1. ESPACES VECTORIELS

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble E muni de l'addition $\oplus$ et de la multiplication externe $\otimes$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. $E = \mathbb{R}^2$
$$\forall u = (x, y) \in E; \forall v = (x_0, y_0) \in E; u \oplus v = (x + x_0, y + y_0)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall u = (x, y) \in E; \lambda \otimes u = (\lambda x, 0)$$
2. $E = \mathbb{R}^3$
$$\forall x, y \in E; x \oplus y = xy$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall x \in E; \lambda \otimes x = x\lambda$$
3. $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$
$$\forall u = (x_1, \ldots, x_n) \in E; \forall v = (y_1, \ldots, y_n) \in E; u \oplus v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall u = (x_1, \ldots, x_n) \in E; \lambda \otimes u = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$
4. $E = \mathbb{R}^2$
$$\forall u = (x, y) \in E; \forall v = (x_0, y_0) \in E; u \oplus v = (x + x_0, y + y_0)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall u = (x, y) \in E; \lambda \otimes u = (\lambda x, y)$$
5. $E = \mathbb{R}^2$
$$\forall u = (x, y) \in E; \forall v = (x_0, y_0) \in E; u \oplus v = (x + x_0, y + y_0)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall u = (x, y) \in E; \lambda \otimes u = (\lambda x, \lambda y)$$
6. $E = \mathbb{R}^2$
$$\forall u = (x, y) \in E; \forall v = (x_0, y_0) \in E; u \oplus v = (x + x_0, y + y_0)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall u = (x, y) \in E; \lambda \otimes u = (\lambda 2x, \lambda 2y)$$
7. $E = \mathbb{R}[X]$
$$\text{Addition usuelle :} \quad (+)$$
$$\text{Multiplication par un réel :} \quad (\cdot)$$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par un nombre complexe définie par :

$$(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Celui-ci s'appelle complexifié de E.

2. SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 3

Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, identifier ceux qui sont stables par l'addition, par la multiplication externe et ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

1. $\mathbb{Z}^2$.
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$.
3. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$.

Exercice 4

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'ils sont des sous-espaces vectoriels. (Préciser à chaque fois l'espace vectoriel dont ils sont sous-espace)

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 2\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 3y = 2z = 4t\}$.
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.
6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 4 = 0\}$.
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 7y = z\}$.
8. $E_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$.
9. $E_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$.
10. $E_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$.
11. $E_{11} = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
12. $E_{12} = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}, \quad a \in \mathbb{R}$.
13. $E_{13} = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$.
14. $E_{14} = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.
15. $E_{15} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P' = 2\}$.
16. $E_{16} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = XP'(X) + P(0)\}$.

Exercice 5

Soit dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u = (-1, 1, 1, 0)$ et $v = (0, 0, 1, 1)$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x, y, z, t pour que $(x, y, z, t) \in \text{Vect}(u, v)$.

Exercice 6

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 7

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et A et B deux sous-ensembles de E.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
2. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(A) = A$.
3. Montrer que si $A \subset B \subset F$ et A engendre F, alors B engendre F.

2.1 Familles libres, liées et génératrices

Exercice 8

1. Ecrire si possible le vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs a_k, $k = 1, 2$ ou 3 avec :

$$v = (1, -2, 5), \quad a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (2, -1, 1), \quad a_3 = (1, 2, 3)$$
$$v = (2, -5, 3), \quad a_1 = (1, -3, 2), \quad a_2 = (2, -4, -1), \quad a_3 = (1, -5, 7)$$

2. Pour quelle valeur de k le vecteur $u = (1, -2, k)$ est-il combinaison linéaire de $v = (3, 0, -2)$ et $w = (2, -1, -5)$?

Exercice 9

1. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^4$ sont-elles libres ou liées ? Fournir les relations de dépendance linéaire quand ces relations existent :

   a. $fe_1 = (3, 0, 1, -2); e_2 = (1, 5, 0, -1); e_3 = (7, 5, 2, 1)$
   b. $fe_1 = (1, 1, 1, 1); e_2 = (1, 1, 1, -1); e_3 = (1, 1, -1, 1); e_4 = (1, -1, 1, 1)$
   c. $fe_1 = (0, 0, 1, 0); e_2 = (0, 0, 0, 1); e_3 = (1, 0, 0, 0); e_4 = (0, 1, 0, 0)$
   d. $fe_1 = (2, -1, 3, 1); e_2 = (1, 1, 1, 1); e_3 = (4, 1, 5, 3); e_4 = (1, -2, 2, 0)$

2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (1, 1, 1, 3), v_3 = (2, 1, 1, 1), v_4 = (-1, 0, -1, 2), v_5 = (2, 3, 0, 1)$. La famille est-elle libre ? Est-elle liée, et si oui, donner les liaisons des vecteurs.

Exercice 10

1. (a) Soit A la famille de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$A = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},$$
$$u_1 = (1,1,1,1), \quad u_2 = (1,1,-1,-1), \quad u_3 = (1,-1,1,-1), \quad u_4 = (1,-1,-1,1)$$

Montrer que A est une base de $\mathbb{R}^4$. Exprimer le vecteur $u = (1,2,1,1)$ dans cette base.

   (b) Mêmes questions avec :

$$A = \{u_1 = (1,1,0,1), \quad u_2 = (2,1,3,1), \quad u_3 = (1,1,0,0), \quad u_4 = (0,1,-1,-1)\}$$

et $u = (0,0,0,1)$.

2. On considère les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ avec $n = 3$ ou 4.

$A = \{a = (2,3,4), b = (-1,-5,-7), c = (3,1,1)\}$
$B = \{a = (1,-1,z), b = (-1,z,1), c = (2,1,-1)\}, \quad z \in \mathbb{C}$
$C = \{a = (1,2,-1,0), b = (4,5,0,1), c = (2,1,2,1)\}$
$D = \{a = (4,3,3,6), b = (1,1,-1,-2), c = (4,2,10,m)\}$
$E = \{a,b,c,d\}, \quad a = (1,2,-1,-2), \quad b = (2,3,0,-1), \quad c = (1,3,-1,0), \quad d = (1,2,1,m), \quad m \in \mathbb{N}$

Indiquer (éventuellement en fonction de m) lesquelles de ces familles sont libres, liées (on donnera les liaisons des vecteurs), génératrices, bases.

3 SOUS-ESPACES ENGENDRÉS, BASES

Exercice 11

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (2,3,-1,0)$, $u_2 = (-3,1,0,2)$, $u_3 = (-4,5,-1,4)$, $u_4 = (9,8,-3,-2)$. Montrer que les sous-espaces engendrés par les familles de vecteurs $\{u_1, u_2\}$ et $\{u_3, u_4\}$ sont identiques. Déterminer leur dimension. Compléter la famille $\{u_1, u_2\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12

1. Sachant que la famille $A = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ engendre $\mathbb{R}^3$, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ contenue dans A avec :
   (a) $u_1 = (2,6,-3)$, $u_2 = (5,15,-8)$, $u_3 = (3,9,-5)$, $u_4 = (1,3,-2)$, $u_5 = (5,3,-2)$
   (b) $u_1 = (1,0,2)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (2,1,5)$, $u_4 = (1,1,3)$, $u_5 = (1,2,1)$
2. De même pour $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_6\}$, avec $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (2,2,0)$, $u_3 = (2,4,1)$, $u_4 = (5,9,2)$, $u_5 = (7,13,3)$, $u_6 = (1,2,1)$
3. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par $A = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, noté $\langle A \rangle$, avec :

$u_1 = (1,2,1,0)$, $u_2 = (3,-4,5,6)$, $u_3 = (2,-1,3,3)$, $u_4 = (-2,6,-4,-6)$

Exercice 13

1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = a\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que E soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$, le sous-ensemble U est-il un sous-espace vectoriel avec :

$$\begin{aligned}
U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid u = (x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\} \\
U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\} \\
U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 2\} \\
U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid u = (x, y, 0)\} \\
U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\} \\
U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \\
U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z^2 = 0\} \\
U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}
\end{aligned}$$

3. Soient U et V deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned}
U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\} \\
V &= \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

   Montrer que $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

Exercice 14

1. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned}
E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 4z = 0\} \\
F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\}
\end{aligned}$$

   Donner une base de E, F, et de $E \cap F$.
2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$\begin{aligned}
E &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\} \\
F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z = 2t\}
\end{aligned}$$

   Donner une base de E, F, et de $E \cap F$.
3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 5 dont une base est $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Si $a \in E$, notons x, y, z, t, s les composantes d'un vecteur $a \in E$. On considère P le sous-ensemble de E défini par $P = \{a \in E \mid x + 4z = 0, 2x + s = 0, y + z + t = 0\}$. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base de P et compléter cette base pour obtenir une base de E.

4. BASES. THÉORÈME DE RÉDUCTION. THÉORÈME DE LA BASE INCOMPLÈTE

Exercice 15

Compléter la famille B par des vecteurs de A pour en faire une base :

1. $$A = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,1)\}$$
$$B = \{(1,0,2,3),(0,1,-2,-3)\}$$

2. $$A = \{(1,0,0,0),(0,0,1,0),(5,1,11,0),(-4,0,-6,1)\}$$
$$B = \{(1,0,1,0),(0,2,0,3)\}$$

Exercice 16

Montrer que A est une base de $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(1,-2,3),(0,1,-2),(1,-1,2)\}$$
$$A = \{(2,-1,1),(0,1,-1),(-2,1,0)\}$$

Exercice 17

Quels sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ qui sont linéairement indépendants et qui engendrent $\mathbb{R}^3$?

$$A = \{(1,3,1),(1,3,0)\}$$
$$B = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,1,1),(0,0,1)\}$$
$$C = \{(1,0,1),(0,1,1),(2,1,3)\}$$
$$D = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

Exercice 18

En utilisant les opérations élémentaires sur les vecteurs donner une base et la dimension de $\langle A\rangle$.

$$A = \{(1,0,1,-1),(3,-2,3,5),(2,-1,2,2),(5,-2,5,3)\}$$
$$A = \{(1,0,1,2,-1),(0,1,-2,1,3),(2,1,0,5,1),(1,-1,3,1,-4)\}$$
$$A = \{(1,2,0,1,0),(2,4,1,4,3),(1,2,2,5,-2),(-1,-2,3,5,4)\}$$

Exercice 19

On considère $u_1 = (1,2,-1,0)$, $u_2 = (1,1,1,1)$, $u_3 = (1,0,1,0)$, $u_4 = (0,1,1,1)$, $u_5 = (2,1,1,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. Justifier sans calcul que la famille $A_1 = (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$ est une famille liée, et que la famille $A_2 = (u_1,u_2,u_4)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.
2. Extraire une famille A libre de A_1.
3. Dédire que A est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$ dans la base A.

Exercice 20

On considère

$$\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \mapsto (1-X)P''(X)$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Déterminer $\Phi(P_i)$, avec $B_c = (P_i, i = 0,1,2,3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer une base du noyau de Φ. Déduire $\dim \ker \Phi$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$. Déduire $\mathrm{rg}(\Phi)$.
5. Expliquer pourquoi $\mathbb{R}_3[X] = \ker \Phi \oplus \mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 21

On considère $P_1 = 1 - X$, $P_2 = 1 - X^2$, $P_3 = X^3 - X^2 + X$, $P_4 = X^3 + X + 1$, $P_5 = X^3$ des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. La famille $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ est-elle libre ?
2. Montrer que $B = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base A.
4. Déterminer les coordonnées de P_5 dans la base A.

Exercice 22

On considère

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z,t) \mapsto (x-z, y+t, z-x-y-t)$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base B_1 du noyau de f. En déduire $\dim \ker f$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ?
4. Soit $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = x-t = 0\}$, déterminer une base B_2 de A.
5. Montrer que $B = (B_1, B_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Que peut-on déduire ?

Exercice 23

Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$$
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$$

1. Trouver une famille de vecteurs qui engendre F, puis une famille de vecteurs qui engendre G, puis $F \cap G$.
2. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 24

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $G = \text{vect}\{(-1,1,0)\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 25

Prouver que les espaces $P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ paire}\}$ et $I = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ impaire}\}$ sont supplémentaires dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.