
**TD : Espaces vectoriels, Sous-espaces
vectoriels, Familles libres, liées et génératrices,
Bases et dimensions, Somme d'espaces vectoriels**

1 Espaces vectoriels,

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble E muni de l'addition \oplus et de la multiplication externe \otimes est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1.

$$E = \mathbb{R}^2$$
$$\forall u = (x, y) \in E, \forall v = (x', y') \in E, \quad u \oplus v = (x + x', y + y')$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y) \in E, \quad \lambda \otimes u = (\lambda x, 0)$$

2.

$$E = \mathbb{R}_+^*$$
$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad x \oplus y = xy$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad \lambda \otimes x = x^\lambda$$

3.

$$E = \mathbb{R}^n (n \geq 1)$$
$$\forall u = (x_1; \dots; x_n) \in E, \forall v = (y_1; \dots; y_n) \in E,$$
$$u \oplus v = (x_1 + y_1; \dots; x_n + y_n)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u = (x_1; \dots; x_n) \in E,$$
$$\lambda \otimes u = (\lambda x_1; \dots; \lambda x_n)$$

4.

$$E = \mathbb{R}^2$$
$$\forall u = (x, y) \in E, \forall v = (x', y') \in E, \quad u \oplus v = (x + x', y + y')$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y) \in E, \quad \lambda \otimes u = (\lambda x, y)$$

5.

$$E = \mathbb{R}^2$$
$$\forall u = (x, y) \in E, \forall v = (x', y') \in E, \quad u \oplus v = (x + x', y + y')$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y) \in E, \quad \lambda \otimes u = (\lambda x, \lambda y)$$

6.

$$E = \mathbb{R}^2$$
$$\forall u = (x, y) \in E, \forall v = (x', y') \in E, \quad u \oplus v = (x + x', y + y')$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y) \in E, \quad \lambda \otimes u = (\lambda^2 x, \lambda^2 y)$$

7.

$$E = \mathbb{R}[X]$$

\oplus est l'addition usuelle des polynômes.

\otimes est la multiplication usuelle d'un polynôme par un réel.

Exercice 2

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par un nombre complexe définie par :

$$(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Montrer que $E \times E$ est alors un \mathbb{C} -espace vectoriel. *Celui-ci s'appelle complexifié de E .*

2 Sous-espaces vectoriels

Exercice 3

Parmi les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 , identifier ceux qui sont stables par l'addition, par la multiplication externe et ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 .

1. \mathbb{Z}^2 .
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| = |y|\}$.
3. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$.
4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y = 1\}$.

Exercice 4

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'ils sont des sous-espaces vectoriels. (Préciser à chaque fois l'espace vectoriel dont ils sont sous-espace)

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 3y + z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y + z = 2\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = 3y = 2z = 4t\}$
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$

6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 + 4 = 0\}$
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 7y = z\}$
8. $E_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 - y^2 = 0\}$
9. $E_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = x + y + z = 0\}$
10. $E_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z(x^2 + y^2) = 0\}$
11. $E_{11} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 0\}$.
12. $E_{12} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}, a \in \mathbb{R}$.
13. $E_{13} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(1) = 0\}$.
14. $E_{14} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(0) = 1\}$.
15. $E_{15} = \{P \in \mathbb{R}[X] ; P' = 2\}$.
16. $E_{16} = \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(X) = XP'(X) + P(0)\}$.

Exercice 5

Soit dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $u = (-1, 1, 1, 0)$ et $v = (0, 0, 1, 1)$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x, y, z, t pour que $(x, y, z, t) \in \text{Vect}(u, v)$.

Exercice 6

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$
 et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 7

Soit (E, \oplus, \otimes) un \mathbb{R} -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , et A et B deux sous-ensembles de E .

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
2. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(A) = A$.
3. Montrer que si $A \subset B \subset F$ et A engendre F , alors B engendre F .

2.1 Familles libres, liées et génératrices

Exercice 8

1. Ecrire si possible le vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs $a_k, k = 1, 2$ ou 3 avec

$$v = (1, -2, 5), a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (2, -1, 1), a_3 = (1, 2, 3)$$

$$v = (2, -5, 3), a_1 = (1, -3, 2), a_2 = (2, -4, -1), a_3 = (1, -5, 7)$$

2. Pour quelle valeur de k le vecteur $u = (1, -2, k)$ est-il combinaison linéaire de $v = (3, 0, -2)$ et $w = (2, -1, -5)$.

Exercice 9

1. Les familles suivantes de \mathbb{R}^4 sont-elles libres ou liées? Fournir les relations de dépendance linéaire quand ces relations existent

$$\{e_1 = (3, 0, 1, -2), e_2 = (1, 5, 0, -1), e_3 = (7, 5, 2, 1)\}$$

$$\{e_1 = (1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 1, -1), e_3 = (1, 1, -1, 1), e_4 = (1, -1, 1, 1)\}$$

$$\{e_1 = (0, 0, 1, 0), e_2 = (0, 0, 0, 1), e_3 = (1, 0, 0, 0), e_4 = (0, 1, 0, 0)\}$$

$$\{e_1 = (2, -1, 3, 1), e_2 = (1, 1, 1, 1), e_3 = (4, 1, 5, 3), e_4 = (1, -2, 2, 0)\}$$

2. On considère dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 1, 1, 3)$, $v_3 = (2, 1, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 0, -1, 2)$, $v_5 = (2, 3, 0, 1)$ La famille est-elle libre? Est-elle liée si oui donner les liaisons des vecteurs.

Exercice 10

1. (a) Soit A la famille de \mathbb{R}^4 définie par

$$A = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 1, -1, -1), u_3 = (1, -1, 1, -1), u_4 = (1, -1, -1, 1). \text{ Montrer que } A \text{ est une base de } \mathbb{R}^4. \text{ Exprimer le vecteur } u = (1, 2, 1, 1) \text{ dans cette base.}$$

- (b) Mêmes questions avec

$$A = \{u_1 = (1, 1, 0, 1), u_2 = (2, 1, 3, 1), u_3 = (1, 1, 0, 0), u_4 = (0, 1, -1, -1)\}$$

$$\text{et } u = (0, 0, 0, 1).$$

2. On considère les familles de vecteurs de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n avec $n = 3$ ou 4 .

$$A = \{a = (2, 3, 4), b = (-1, -5, -7), c = (3, 1, 1)\},$$

$$B = \{a = (1, -1, z), b = (-1, z, 1), c = (2, 1, -1)\}, z \in \mathbb{C}$$

$$C = \{a = (1, 2, -1, 0), b = (4, 5, 0, 1), c = (2, 1, 2, 1)\},$$

$$D = \{a = (4, 3, 3, 6), b = (1, 1, -1, -2), c = (4, 2, 10, m)\}$$

$$E = \{a, b, c, d\}$$

$$a = (1, 2, -1, -2), b = (2, 3, 0, -1), c = (1, 3, -1, 0), d = (1, 2, 1, m)$$

où $m \in \mathbb{N}$. Indiquer (éventuellement en fonction de m) lesquelles de ces familles sont libres, liées (on donnera les liaisons des vecteurs), génératrices, bases.

3 SOUS-ESPACES ENGENDRÉS, BASES

Exercice 11

On considère dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $u_1 = (2, 3, -1, 0)$, $u_2 = (-3, 1, 0, 2)$, $u_3 = (-4, 5, -1, 4)$, $u_4 = (9, 8, -3, -2)$. Montrer que les sous-espaces engendrés

par les familles de vecteurs $\{u_1, u_2\}$, $\{u_3, u_4\}$ sont identiques. Déterminer leur dimension. Compléter la famille $\{u_1, u_2\}$ pour obtenir une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 12

- Sachant que la famille $A = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ engendre \mathbb{R}^3 , trouver une base de \mathbb{R}^3 contenue dans A avec
 - $u_1 = (2, 6, -3), u_2 = (5, 15, -8), u_3 = (3, 9, -5), u_4 = (1, 3, -2), u_5 = (5, 3, -2)$
 - $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (2, 1, 5), u_4 = (1, 1, 3), u_5 = (1, 2, 1)$
- De même pour $A = (u_1, u_2, \dots, u_6)$, avec $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (2, 2, 0), u_3 = (2, 4, 1), u_4 = (5, 9, 2), u_5 = (7, 13, 3), u_6 = (1, 2, 1)$
- Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par $A = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, noté $\langle A \rangle$, avec
 - $u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (3, -4, 5, 6), u_3 = (2, -1, 3, 3), u_4 = (-2, 6, -4, -6)$
 - $u_1 = ((0, 1, 2, -1), u_2 = (0, 1, -2, 1, 3), u_3 = (2, 1, 0, 5, 1), u_4 = (1, -1, 3, 1, -4)$

Exercice 13

- Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y - z = a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que E soit un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R} , le sous ensemble U est-il un sous-espace vectoriel avec

$$\begin{aligned}
 U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u = (x, x, x), x \in \mathbb{R}\}, \\
 U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\} \\
 U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2\}, \\
 U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u = (x, y, 0)\} \\
 U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0\}, \\
 U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \\
 U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - y^2 + z^2 = 0\}, \\
 U &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x, y, z \in \mathbb{Q}\}
 \end{aligned}$$

- Soient U et V deux sous-espaces de \mathbb{R}^3 définis par

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$$

et

$$V = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $U \oplus V = \mathbb{R}^3$

Exercice 14

1. Soient les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 4z = 0\}$$

et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y - 2z = 0\}.$$

Donner une base de E , F et de $E \cap F$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 définis par $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z + t = 0\}$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, z = 2t\}$. Donner une base de E , F et de $E \cap F$.
3. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 5 dont une base est $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Si $a \in E$ on note x, y, z, t, s les composantes d'un vecteur $a \in E$. On considère P le sous-ensemble de E défini par $P = \{a \in E, x + 4z = 0, 2x + s = 0, y + z + t = 0\}$. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer une base de P et compléter cette base pour obtenir une base de E .

4 BASES. THÉOREME DE RÉDUCTION. THÉOREME DE LA BASE INCOMPLETE

Exercice 15

Compléter la famille B par des vecteurs de A pour en faire une base

$$A = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}, B = \{(1, 0, 2, 3), (0, 1, -2, -3)\}$$
$$A = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (5, 1, 11, 0), (-4, 0, -6, 1)\}, B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 3)\}$$

Exercice 16

2 Montrer que A est une base de \mathbb{R}^3

$$A = \{(1, -2, 3), (0, 1, -2), (1, -1, 2)\}, A = \{(2, -1, 1), (0, 1, -1), (-2, 1, 0)\}$$

Exercice 17

Quels sont les sous-ensembles de \mathbb{R}^3 qui sont linéairement indépendants et qui engendrent \mathbb{R}^3

$$A = \{(1, 3, 1), (1, 3, 0)\}, B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$
$$C = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 1, 3)\}, D = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

Exercice 18

En utilisant les opérations élémentaires sur les vecteurs donner une base et la dimension de $\langle A \rangle$

$$A = \{(1, 0, 1, -1), (3, -2, 3, 5), (2, -1, 2, 2), (5, -2, 5, 3)\},$$
$$A = \{(1, 0, 1, 2, -1), (0, 1, -2, 1, 3), (2, 1, 0, 5, 1), (1, -1, 3, 1, -4)\}$$
$$A = \{(1, 2, 0, 1, 0), (2, 4, 1, 4, 3), (1, 2, 2, 5, -2), (-1, -2, 3, 5, 4)\}$$

Exercice 19

On considère $u_1 = (1, 2, -1, 0), u_2 = (1, 1, 1, 1), u_3 = (1, 0, 1, 0), u_4 = (0, 1, 1, 1), u_5 = (2, 1, 1, 1)$ des vecteurs de \mathbb{R}^4 .

1. Justifier sans calcul que la famille $A_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est une famille liée et la famille $A_2 = (u_1, u_2, u_4)$ n'est pas une famille génératrice de \mathbb{R}^4 .
2. Extraire une famille A libre de A_1 .
3. Dédire que A est une base de \mathbb{R}^4 .
4. Déterminer les coordonnées du vecteur (x, y, z, t) de \mathbb{R}^4 dans la base A .

Exercice 20

On considère

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto (1-X)P''(X) \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Déterminer $\phi(P_i)$, avec $B_c = (P_i, i = 0, \dots, 3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer une base du noyau de ϕ . Dédire $\dim \ker \phi$.
4. Déterminer une base de $\text{Im} \phi$. Dédire $\text{rg}(\phi)$.
5. Expliquer pourquoi on n'a pas $\mathbb{R}_3[X] = \ker \phi \oplus \text{Im} \phi$.

Exercice 21

On considère $P_1 = 1 - X, P_2 = 1 - X^2, P_3 = X^3 - X^2 + X, P_4 = X^3 + X + 1, P_5 = X^3$ des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. La famille $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ est-elle libre ?
2. Montrer que $B = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base A .
4. Déterminer les coordonnées de P_5 dans la base A .

Exercice 22

On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (x - z, y + t, z - x - y - t) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base B_1 du noyau de f . Dédire $\dim \ker f$.
3. Déterminer une base de $\text{Im} f$. L'application f est-elle surjective.
4. Soit $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = x - t = 0\}$, déterminer une base B_2 de A .

5. Montrer que $B = (B_1, B_2)$ est une base de \mathbb{R}^4 . Que peut-on déduire?

Exercice 23

Soient les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}.$$

1. Trouver une famille de vecteurs qui engendre F , puis une famille de vecteurs qui engendre G , puis $F \cap G$.
2. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires?

Exercice 24

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $G = \text{vect}\{(-1, 1, 0)\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 25

Prouver que les espaces $P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ paire}\}$ et $I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ impaire}\}$ sont supplémentaires dans $F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .