

## TD 7 - Équation différentielle

---

### Équation différentielle d'ordre 1

---

**Exercice 1.** -

Donner une équation différentielle dont la fonction  $f$  est une solution.

1.  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

2.  $f(x) = 1 + \frac{e^x}{1+x^2}$ .

3.  $f(x) = \frac{c}{1+e^x}$ ; où  $c \in \mathbb{R}$ .

4.  $f(x) = \frac{ax}{1+x^2}$ ; où  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2.** -

Résoudre les équations différentielles. Préciser le domaine de validité des solutions :

1.  $y' = -2y$ ,

2.  $y' = ty$ ,

3.  $t^2 y' = -y$ ,

4.  $y' = \frac{y}{1+t^2}$ .

5.  $y' = \frac{y}{1-t^2}$ .

6.  $yy' = -t$ .

7.  $y' = e^{t-y}$ .

8.  $(1+t^2)y' = 1+y^2$ .

9.  $(1+t^2)y' = \frac{1+y^2}{t^3}$

10.  $y' = e^{-y} \tan t$ .

---

### Équation différentielle linéaire d'ordre 1

---

**Exercice 3.** -

Résoudre les équations différentielles, par la méthode de variation de la constante. Préciser le domaine de validité des solutions :

1.  $y' = -2ty + t$

2.  $y' = -y \tan t + \cos t \sin t$

3.  $y' = -\frac{y}{t^2-1} + t^2$

4.  $y' = -\frac{y}{t} - 1$

5.  $y' = -\frac{y}{t^2} - \frac{1}{t^3}$

6.  $y' = -\frac{y}{t^2} + \exp\left(\frac{1}{t}\right)$

7.  $y' = 2ty - (2t-1)e^t$

8.  $y' \cos t + y \sin t = \cos t + t \sin t$

9.  $y' = \frac{(2t-1)}{t^2-1}y + 1$

10.  $(e^t - 1)y' + (e^t + 1)y = 3 + 2e^t$

**Exercice 4.** -

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1.  $xy' - y = x$ ; et  $y(1) = 1$
2.  $y' + x^2y + x^2 = 0$ ; et  $y(0) = 0$
3.  $y' - y = \cos x + e^x \sin 2x$ ; et  $y(0) = 0$
4.  $(x - 1)y' + y = x$ ; et  $y(2) = 2$
5.  $4y' - y = \cos x$ ; et  $y(0) = 0$
6.  $y' - y = \sinh x$ ; et  $y(0) = 1$
7.  $y' - y \cos t = 2 \cos t - \sin^2 t \cos t$ ; et  $y(0) = 1$
8.  $t(t - 1)y' - (3t - 1)y = -t^2(t + 1)$ ; et  $y(2) = 0$
9.  $e^x y' + y = 0$ ; et  $y(0) = 1$

### Équation différentielle linéaire d'ordre 2

#### Exercice 5. -

Résoudre les équations différentielles :

1.  $y'' - 6y' + 9y = 0$
2.  $y'' - 2y' + 2y = 0$
3.  $y'' + 4y = 0$ ;
4.  $y'' - 6y' + 10y = 0$
5.  $y'' + 5y' + 6y = 0$
6.  $y'' + 4y' - 16y = 0$
7.  $y'' - y = t^3 + t^2$
8.  $y'' + 2y' + y = e^t$
9.  $y'' + 2y' + y = e^t + \cos t$
10.  $y'' + 2y' + 4y = t^2 e^t$
11.  $y'' - 2y' + 2y = t e^t \cos t$
12.  $y'' - y = -6 \cos t + 2t \sin t$
13.  $y'' - 2y' + y = e^t \sin t$
14.  $y'' + 3y' + 2y = e^{2t}(t + 1)$
15.  $y'' - 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1)$
16.  $y'' + y' - 6y = e^t(2t + 1)$

#### Exercice 6. -

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1.  $y'' - y' - 2y = 0$ ; et  $y(0) = 1, y'(0) = 5$
2.  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ; et  $y(0) = 2, y'(0) = 0$
3.  $y'' + 4y' + 4y = 0$ ; et  $y(0) = 1, y'(0) = 1$
4.  $y'' + 10y' + 25y = t^3$ ; et  $y(0) = 1, y'(0) = 1$

#### Exercice 7. - Changement des variables ou Réduction de l'ordre d'une équation différentielle.

Résoudre les équations différentielles :

1.  $y''' - y'' - 2y' = 0$
2.  $y'''' + 4y'' + 3y' = 0$
3.  $t^2 y'' + 3ty' + y = 0$
4.  $t^2 y'' + ty' + y = 0$

Pour aller plus loin

#### Exercice 8. -

Résoudre les équations différentielles :

1.  $x^3 y' = xy^2 + x^2 y + 2y^3$ ,
2.  $x^2 y' = xy - 5y^2$ ,
3.  $xy' = y + x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ ,
4.  $xyy' = x^2 - xy + y^2$ .

### Équation différentielle non-linéaire d'ordre 1

**Exercice 9. -**

Résoudre les équations différentielles :

1.  $x^3y' = x^2y + y^2 - x^2$

2.  $y' = y^2 - \frac{1}{x^2}$

3.  $y' - y + xy^3 = 0$

4.  $y' - y + xy^4 = 0$

5.  $xy' - y + \frac{x^4}{y^3} = 0$

6.  $xy' - \frac{3}{4}y = (9x - 3)y^5$

**Exercice 10. -**

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1.  $y' + \frac{y}{x} - y^2 + \frac{1}{x^2} = 0$ ; et  $y(-1) = -2$

2.  $(1 + x^2)y' = y^2 - 1$ ; et  $y(0) = 2$

3.  $xy' = y^2 - 3xy - 1$ ; et  $y(3) = 9$

4.  $xy' = -y + xy^3$ ; et  $y(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

## Applications

**Exercice 11.**

Résoudre les systèmes différentiels linéaires suivants :

1.  $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 4x - 6y \end{cases}$

3.  $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

4.  $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

6.  $\begin{cases} x' = 4x + 4y \\ y' = -x - y \end{cases}$

7.  $\begin{cases} x' = x + y + t \\ y' = -2x + 4y + e^t \end{cases}$

8.  $\begin{cases} x' = 5x - 4y + 1 \\ y' = -x + 2y + e^t \end{cases}$

9.  $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + e^t \\ z' = x + y + z \end{cases}$

**Exercice 12.**

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes  $y$  suivantes :

1.  $y = \frac{c}{x}$ ; où  $c \in \mathbb{R}$

2.  $y = cx^2$ ; où  $c \in \mathbb{R}$

3.  $y' = -2ty$ ,

4.  $t^2y' = -y^2$ ,

5.  $yy' = 1 + t^2$ .

6.  $yy' = 1 - t^2$ .

7.  $y' = e^y \tan t$ .